Optimisation géométrique

Samuel Rochetin

Samedi 15 septembre 2012

Exercice. *$[AB]$ est un segment de longueur ℓ. M est un point de $[AB]$. AMP et MBQ sont des triangles équilatéraux.*

Peut-on affirmer que l'aire du triangle PMQ est maximale lorsque la longueur PQ est minimale ?

Solution.

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_{PMQ} &= \frac{1}{2} \times MP \times MQ \times \sin\left(\widehat{PMQ}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} x(\ell - x)\end{aligned}$$

En posant $x \coloneqq MP$ et en utilisant les données de l'énoncé et les angles supplémentaires.

Une étude de fonction polynomiale du second degré montre que l'aire est maximale pour $x = \frac{l}{2}$.

Or, d'après le théorème d'Al-Kashi,

$$\begin{aligned}PQ^2 &= MP^2 + MQ^2 - 2 \times MP \times MQ \times \cos\left(\widehat{PMQ}\right) \\ &= 3x^2 - 3\ell x + \ell^2\end{aligned}$$

Une étude de fonction polynomiale du second degré montre que PQ^2 donc PQ est minimale pour $x = \frac{l}{2}$.

La réponse est donc : oui. $\square$