Khôlle d'analyse

Samuel Rochetin

Mercredi 21 mars 2018

Exercice. *On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme 1, 2 ou infinie. Pour chacun des sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$, préciser s'il est ouvert, fermé ou ni ouvert ni fermé. Déterminer l'intérieur de C.*

— $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 < 1 \text{ et } xy > 0\right\}$.
— $B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \geq 1 \text{ ou } y = 0\right\}$.
— $C = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 > 1 \text{ ou } y = 0\right\}$.

Solution.

— Posons $A_1 := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 < 1\right\}$ et $A_2 := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, xy > 0\right\}$. A_1 est la boule ouverte de centre O et de rayon 1 pour la norme 2 donc d'après le cours, A_1 est ouvert. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto xy$. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2$ comme fonction polynôme. $A_2 = f^{-1}(]0; +\infty[)$ donc A_2 est l'image réciproque d'un ouvert de $\mathbb{R}$ par une fonction continue donc A_2 est ouvert. Or, $A = A_1 \cap A_2$ donc A est une intersection finie d'ouverts donc $\boxed{A \text{ est ouvert.}}$

— Posons $B_1 := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \geq 1\right\}$ et $B_2 := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = 0\right\}$. B_1 est le complémentaire de A_1 dans $\mathbb{R}^2$ et A_1 est ouvert donc B_1 est fermé. Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto y$. La fonction g est continue sur $\mathbb{R}^2$ comme fonction polynôme. $B_2 = g^{-1}(\{0\})$ donc B_2 est l'image réciproque d'un fermé de $\mathbb{R}$ par une fonction continue donc B_2 est fermé. Or, $B = B_1 \cup B_2$ donc B est une réunion finie de fermés donc $\boxed{B \text{ est fermé.}}$

— Intuitivement, C est défini par une inégalité stricte et une égalité donc C n'est ni ouvert ni fermé. Montrons que C n'est pas ouvert. Supposons que C soit ouvert. $O \in C$ donc il existe une boule ouverte de centre O incluse dans C, c'est-à-dire $\exists r > 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 < r^2 \implies x^2 + y^2 > 1 \text{ ou } y = 0$. Le point $\left(0; \frac{r}{2}\right)$ appartient à cette boule puisque $0^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2 < r^2$ donc ce point appartient aussi à C. Or, $\frac{r}{2} \neq 0$ donc $0^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2 > 1 \iff r^2 > 4$. Donc le point $(0; 1)$ appartient à cette boule puisque $0^2 + 1^2 < 4 < r^2$. Or, $0^2 + 1^2 \leq 1$ et $1 \neq 0$ donc $(0; 1) \notin C$. Contradiction. Donc C n'est pas ouvert. Montrons que C n'est pas fermé. Posons $\forall n \in \mathbb{N}, (x_n, y_n) := \left(0; 1 + \frac{1}{n+1}\right)$. Nous avons une suite de points de C puisque $\forall n \in \mathbb{N}, x_n^2 + y_n^2 = 0^2 + \left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right)^2 > 1$. Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} (x_n, y_n) = (0; 1) \notin C$ donc cette suite ne converge pas dans C. Donc C n'est pas fermé. Donc $\boxed{C \text{ n'est ni ouvert ni fermé.}}$

— Intuitivement, seule la condition $y = 0$ empêche C d'être ouvert. Posons $U := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 > 1\right\}$ et montrons que $\mathring{C} = U$. Nous avons $U \subset C$. Nous pouvons aisément montrer que U est ouvert. Donc par définition de l'intérieur, $U \subset \mathring{C}$. Réciproquement, montrons que $\mathring{C} \subset U$. Posons $V := \left\{(x; 0) \in \mathbb{R}^2, x \in [-1; 1]\right\}$. Nous avons $\mathring{C} \subset C = U \sqcup V$ donc il suffit de montrer que $\mathring{C} \cap V = \emptyset$. C'est immédiat puisqu'aucun point de V ne peut appartenir à $\mathring{C}$ comme nous l'avons vu en montrant que C n'était pas ouvert. Donc $\boxed{\mathring{C} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 > 1\right\}.}$

$\square$