Un encadrement classique

Samuel Rochetin

Mercredi 28 novembre 2018

Exercice. *Montrer que* $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.

Solution. Par définition de la partie entière, $\lfloor x \rfloor \leq x$ et $\lfloor y \rfloor \leq y$ donc, par somme, $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq x + y$. Ainsi, $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$ est un entier inférieur ou égal à $x + y$. Or, par définition de la partie entière, $\lfloor x + y \rfloor$ est le plus grand entier inférieur ou égal à $x + y$ donc $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor$.

Par définition de la partie entière, $x < \lfloor x \rfloor + 1$ et $y < \lfloor y \rfloor + 1$ donc, par somme, $x + y < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2$. Or, par définition de la partie entière, $\lfloor x + y \rfloor \leq x + y$ donc $\lfloor x + y \rfloor < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2$. Or, $\lfloor x + y \rfloor$ et $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2$ sont des entiers donc $\lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.

D'où le résultat. $\square$