Khôlle d'analyse

Samuel Rochetin

Dimanche 18 février 2018

Exercice. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $u_n = \dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor$.*

1. *Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.*
2. *En déduire que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.*
3. *Déterminer un réel $x > 0$ tel que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne soit pas monotone.*

Solution.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition de la partie entière, $\forall k \in [\![1;n]\!], \forall x \in \mathbb{R}, \lfloor kx \rfloor \leq kx < \lfloor kx \rfloor + 1 \iff kx - 1 < \lfloor kx \rfloor \leq kx \implies \dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n}(kx-1) < \dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n}\lfloor kx \rfloor \leq \dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n} kx \iff \dfrac{1}{n^2}\left(\dfrac{n(n+1)}{2} \times x - n\right) < u_n \leq \dfrac{1}{n^2} \times \dfrac{n(n+1)}{2} \times x \iff \dfrac{n+1}{2n}x - \dfrac{1}{n} < u_n \leq \dfrac{n+1}{2n}x$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+1}{2n}x - \dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+1}{2n}x = \dfrac{x}{2}$ donc d'après le théorème des gendarmes, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et $\boxed{\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n = \dfrac{x}{2}.}$
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n := 2u_n$. Le réel x est limite de la suite de rationnels $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Par arbitraire sur x, $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
3. Remarquons que si $x \in \mathbb{N}^*$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone car $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{2n}$. Montrons que si $x = \dfrac{1}{2}$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas monotone. $\forall p \in \mathbb{N}, u_{2p+1} = \dfrac{1}{(2p+1)^2}\sum\limits_{k=1}^{2p+1}\left\lfloor \dfrac{k}{2} \right\rfloor = \dfrac{1}{(2p+1)^2}\sum\limits_{k=2}^{2p+1}\left\lfloor \dfrac{k}{2} \right\rfloor = \dfrac{1}{(2p+1)^2}\sum\limits_{k=1}^{p} 2k$ car si k est pair, alors $\left\lfloor \dfrac{k+1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \dfrac{k}{2} \right\rfloor = \dfrac{k}{2}$. Nous obtenons aisément $u_{2p+1} = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4(2p+1)^2} < \dfrac{1}{4}$. De même, il vient $\forall p \in \mathbb{N}^*, u_{2p} = \dfrac{1}{4}$. Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas monotone. $\boxed{x = \dfrac{1}{2} \text{ convient.}}$

$\square$