Une construction du pentagone régulier à la règle et au compas

Samuel Rochetin

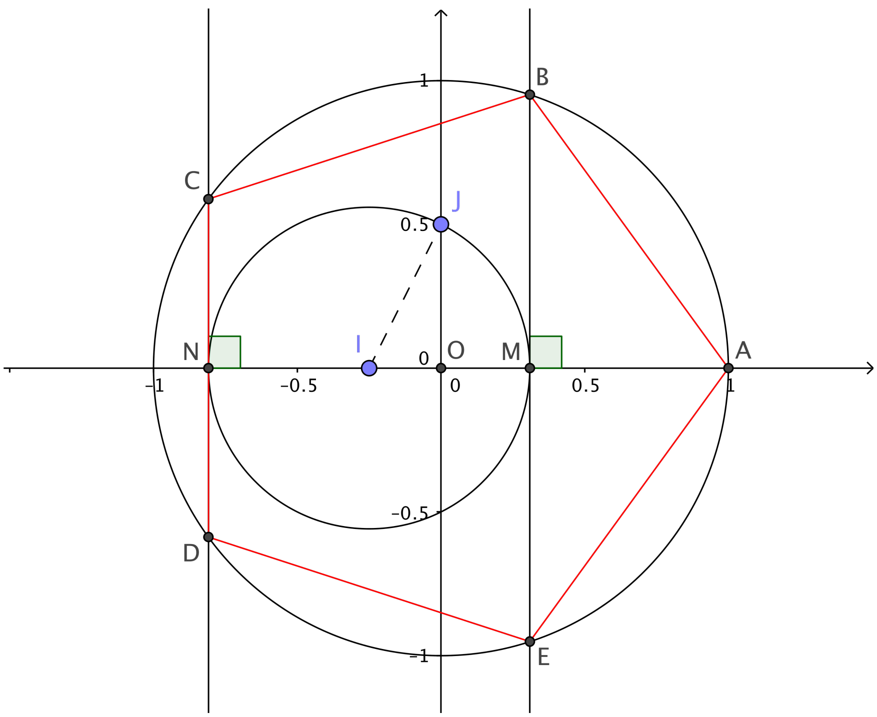
Mardi 16 août 2016

Résumé

Il existe plusieurs constructions du pentagone régulier à la règle et au compas, dont certaines sont connues depuis l'Antiquité. En voici une extrêmement simple, expliquée à l'aide d'outils de niveau Terminale S (sauf la formule de transformation d'une somme de cosinus en produit, vue en Licence 1). Nous supposons ici connues les deux constructions élémentaires (niveau Sixième) à la règle et au compas suivantes : placer le milieu d'un segment et tracer la perpendiculaire à une droite passant par un point donné.

Proposition. *Plaçons-nous dans un repère orthonormé, considérons le cercle trigonométrique et le point* $A(1,0)$*. Placer* $I\left(-\frac{1}{4},0\right)$ *et* $J\left(0,\frac{1}{2}\right)$*. Le cercle de centre* I *et de rayon* IJ *coupe* $[OA)$ *en* M *et* $[OI)$ *en* N*. La perpendiculaire à* (OA) *en* M *coupe le cercle trigonométrique en* B *et* E*, où* $\widehat{AOB} > 0$*. La perpendiculaire à* (OI) *en* N *coupe le cercle trigonométrique en* C *et* D*, où* $\widehat{AOC} > 0$*.*

$ABCDE$ est un pentagone régulier.



Démonstration. I est le milieu de $[MN]$ donc $x_M + x_N = 2x_I = -\frac{1}{2}$. $[MN]$ est un diamètre du cercle de centre I et de rayon IJ donc le triangle JMN est rectangle en J, donc $\widehat{MJO} = \widehat{JNO}$. En passant à la tangente, $\dfrac{OM}{OJ} = \dfrac{OJ}{ON}$ (relation de triangles semblables) $\iff x_M x_N = -\frac{1}{4}$ car $x_N = -ON < 0$.

$\boxed{x_M \text{ et } x_N \text{ sont donc les racines du polynôme } 4X^2 + 2X - 1.}$

Posons $z = \exp\left(\frac{2i\pi}{5}\right)$. z est une racine cinquième de l'unité donc $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0 \iff z^2 + \dfrac{1}{z^2} + z + \dfrac{1}{z} + 1 = 0 \iff 2\Re(z^2) + 2\Re(z) + 1 = 0$ (car $\dfrac{1}{z} = \overline{z}$) $\iff \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = -\frac{1}{2}$. Or, $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 2\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ (transformation somme-produit) $\iff \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = -\frac{1}{4}$ (car $\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$).

$\boxed{\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) \text{ et } \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \text{ sont donc les racines du polynôme } 4X^2 + 2X - 1.}$

En examinant les signes, il vient :

$\boxed{x_M = x_B = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \cos\left(4 \times \frac{2\pi}{5}\right) = x_E}$ et $\boxed{x_N = x_C = \cos\left(2 \times \frac{2\pi}{5}\right) = \cos\left(3 \times \frac{2\pi}{5}\right) = x_D.}$ □