Suites ou fonctions périodiques

Samuel Rochetin

Samedi 8 octobre 2016

Exercice 1. *Montrer que toute suite périodique non constante n'a pas de limite.*

Solution n°1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite (réelle) périodique non constante, de période $T \in \mathbb{N}^*$. Soit $E := \{u_0, u_1, \dots, u_{T-1}\}$ l'ensemble des valeurs prises par la suite. Supposons que (u_n) converge vers $l \in \mathbb{R}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Quitte à réindexer, supposons $u_n = u_0$. Pour tout $k \in \mathbb{N}, u_{n+kT} = u_n = u_0$. Par passage à la limite pour $k \to \infty$, il vient $l = u_0$. En reproduisant le raisonnement pour $u_{n+1}, \dots, u_{n+T-1}$, par unicité de la limite, nous obtenons $u_0 = u_1 = \dots = u_{T-1} = l$. Donc (u_n) est constante. Contradiction. $\square$

Solution n°2. Nous conservons les notations et hypothèses de la solution précédente.

(u_n) est constante et converge vers l si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = l$. Donc au moins un des termes de (u_n) est différent de l. Quitte à réindexer, supposons que $u_0 \neq l$. Posons $\varepsilon := \min\limits_{\substack{u_i \in E \\ u_i \neq l}} |u_i - l| > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0 \implies |u_n - l| < \min\limits_{\substack{u_i \in E \\ u_i \neq l}} |u_i - l| = \varepsilon$. Soit n_1 un multiple de T supérieur à n_0. Nous avons $|u_0 - l| = |u_{n_1} - l| < \min\limits_{\substack{u_i \in E \\ u_i \neq l}} |u_i - l|$. Contradiction. $\square$

Exercice 2. *Montrer que toute fonction périodique non constante n'a pas de limite en $+\infty$.*

Solution n°1. Soit f une fonction (réelle) périodique non constante, de période $T \in \mathbb{R}^*$. Supposons que f converge vers $l \in \mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}, f(x + nT) = f(x)$. Or, d'après le critère séquentiel de la limite (qui ne nécessite pas que f soit continue), $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x + nT) = l$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = l$. Donc f est constante. Contradiction. $\square$

Solution n°2. Soit f une fonction (réelle) périodique non constante, de période $T \in \mathbb{R}^*$. Soit $F := f([0;T])$ l'ensemble des valeurs de f. Supposons que f converge vers $l \in \mathbb{R}$.

f est constante et converge vers l si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = l$. Donc au moins un élément de F est différent de l. Quitte à translater, supposons que $f(0) \neq l$. Posons $\varepsilon := \inf\limits_{x \notin f^{-1}(\{l\})} |f(x) - l| > 0$. Il existe $A > 0$ tel que $x \geq A \implies |f(x) - l| < \min\limits_{x \notin f^{-1}(\{l\})} |f(x) - l| = \varepsilon$. Soit x_0 un multiple de T supérieur à A. Un tel réel x_0 existe parce que $\mathbb{R}$ est archimédien. Nous avons $|f(0) - l| = |f(x_0) - l| < \min\limits_{x \notin f^{-1}(\{l\})} |f(x) - l|$. Contradiction. $\square$

Solution n°3. Nous conservons les notations et hypothèses de la solution précédente.

f n'est pas constante donc, quitte à changer f en $-f$, il existe $a \in [0;T]$ tel que $f(a) - f(0) = A > 0$. Donc pour tout $k \in \mathbb{N}, f(a + kT) - f(kT) = A$. Il existe $(k_1, k_2) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k \geq \max\{k_1, k_2\} \implies |f(a + kT) - l| < \dfrac{A}{4}$ et $|f(kT) - l| < \dfrac{A}{4}$. Donc, avec l'inégalité triangulaire, nous avons $|f(a + kT) - f(kT)| = |f(a + kT) - l - (f(kT) - l)| \leq |f(a + kT) - l| + |f(kT) - l| < \dfrac{A}{2}$. Contradiction. $\square$

Application. *En posant $f : x \mapsto \int_0^x \cos(t)\mathrm{d}t$, la fonction f est 2π-périodique et non constante, donc l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \cos(t)\mathrm{d}t$ ne converge pas.*