Khôlle d'analyse

Samuel Rochetin

Samedi 27 janvier 2018

Exercice. *En utilisant la définition de la continuité, montrer que toute fonction polynôme est continue sur* $\mathbb{R}$.

Solution. Procédons par récurrence sur le degré n d'un polynôme.

Initialisation : le cas $n = 0$ correspondant aux polynômes constants est trivial et inclut le cas du polynôme nul.

Hérédité : supposons qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que toute fonction polynôme de degré n soit continue sur $\mathbb{R}$. Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $a_{n+1} \neq 0$. Posons $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) := \sum_{k=0}^{n+1} a_k x^k$. Ainsi, $\deg P = n + 1$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. En remarquant que les termes constants se simplifient, nous avons $|P(x) - P(x_0)| = \left|\sum_{k=0}^{n+1} a_k x^k - \sum_{k=0}^{n+1} a_k x_0^k\right| = \left|\sum_{k=1}^{n+1} a_k \left(x^k - x_0^k\right)\right|$. Une identité remarquable donne $\forall k \in [\![1; n+1]\!], x^k - x_0^k = (x - x_0) \sum_{i=0}^{k-1} x^i x_0^{k-1-i}$. Par homogénéité de la valeur absolue, $|P(x) - P(x_0)| = |x - x_0||Q(x)|$, où $Q(x) := \sum_{k=1}^{n+1} a_k \sum_{i=0}^{k-1} x^i x_0^{k-1-i}$. Remarquons que Q est une fonction polynôme telle que $\deg Q = n$. Par hypothèse de récurrence, Q est continue en x_0 donc $\exists \eta' \in \mathbb{R}_+^*, |x - x_0| \leq \eta' \implies |Q(x) - Q(x_0)| \leq \varepsilon$. Or, d'après la seconde inégalité triangulaire, $|Q(x)| - |Q(x_0)| \leq |Q(x) - Q(x_0)|$, donc $|x - x_0| \leq \eta' \implies |Q(x)| \leq \varepsilon + |Q(x_0)|$. Posons $\eta := \min\left\{\eta'; \frac{\varepsilon}{\varepsilon + |Q(x_0)|}\right\}$. Nous avons $|x - x_0| \leq \eta \iff \left(|x - x_0| \leq \eta' \text{ et } |x - x_0| \leq \frac{\varepsilon}{\varepsilon + |Q(x_0)|}\right) \implies |P(x) - P(x_0)| \leq \varepsilon$. Donc P est continue sur $\mathbb{R}$, par arbitraire sur x_0. $\square$