Principe des tiroirs

Samuel Rochetin

Dimanche 2 décembre 2018

Exercice. *Le principe des tiroirs, aussi appelé principe de Dirichlet, permet de résoudre des problèmes d'existence.*

1. *On remplit chaque case d'un tableau de trois lignes et trois colonnes par* $-1, 0$ *ou* 1*. Montrer que parmi les sommes sur les lignes, les colonnes et les diagonales, au moins deux sont égales.*
2. *Montrer dans tout collège, il existe au moins deux élèves ayant le même nombre d'amis élèves du collège.*
3. *On colorie chaque case d'un tableau de cinq lignes et cinq colonnes en noir ou blanc. Montrer qu'il existe quatre cases de même couleur se trouvant à l'intersection de deux lignes et deux colonnes.*
4. *Quel est le nombre minimal de personnes à réunir pour être sûr que parmi ces personnes, au moins cinq soient nées le même mois ?*

Solution.

1. Chaque somme peut prendre sept valeurs : $-3, -2, -1, 0, 1, 2$ ou 3 ; ce sont les tiroirs. Or, il y a trois lignes, trois colonnes et deux diagonales dans le tableau donc il y a huit sommes à calculer ; ce sont les chaussettes. $8 > 7$ donc d'après le principe des tiroirs, il existe au moins deux sommes égales.
2. Soit un collège comptant n élèves. En demandant à chaque élève combien il a d'amis dans ce collège, nous récoltons n réponses ; ce sont les chaussettes. S'il n'existe aucun élève n'ayant aucun ami, alors la réponse de chaque élève peut prendre $n-1$ valeurs : $1, 2, \ldots, n-1$ amis ; ce sont les tiroirs. $n > n-1$ donc d'après le principe des tiroirs, il existe deux élèves ayant le même nombre d'amis. S'il existe exactement un élève n'ayant aucun ami, alors récoltons les réponses des $n-1$ élèves restants ; ce sont les chaussettes. La réponse de chacun de ces élèves peut prendre $n-2$ valeurs : $1, 2, \ldots, n-2$ amis ; ce sont les tiroirs. $n-1 > n-2$ donc d'après le principe des tiroirs, il existe deux élèves ayant le même nombre d'amis. S'il existe au moins deux élèves n'ayant aucun ami, alors la démonstration est achevée.
3. La première colonne compte cinq cases à colorier ; ce sont les chaussettes. Chaque case peut être coloriée de deux façons possibles ; ce sont les tiroirs. Donc d'après le principe des tiroirs, il existe au moins trois cases de même couleur dans cette colonne, situées aux lignes L_i, L_j, L_k, où i, j, k sont

trois entiers naturels distincts compris entre 1 et 5. Supposons que ces trois cases soient noires, quitte à reproduire le raisonnement dans le cas où elles seraient blanches.

Examinons les cases situées aux lignes L_i, L_j, L_k des colonnes restantes.

— 1er cas : s'il existe une colonne dans laquelle ces trois cases sont noires, alors la démonstration est achevée.

— 2e cas : s'il existe une colonne dans laquelle deux de ces cases sont noires, alors la démonstration est achevée.

— 3e cas : s'il existe une colonne dans laquelle aucune de ces cases n'est noire, c'est-à-dire dans laquelle ces trois cases sont blanches, alors examinons les cases situées aux lignes L_i, L_j, L_k d'une troisième colonne ; ce sont les chaussettes. Chaque case peut être coloriée de deux façons possibles ; ce sont les tiroirs. Donc d'après le principe des tiroirs, il existe au moins deux cases de même couleur parmi ces trois cases. En considérant les trois colonnes examinées, la démonstration est achevée.

— 4e cas : si aucun des cas précédents n'est vérifié, alors dans chacune des quatre colonnes restantes, une seule case parmi les cases situées aux lignes L_i, L_j, L_k est noire. Il y a quatre colonnes restantes ; ce sont les chaussettes. Dans chacune de ces quatre colonnes, en considérant les lignes L_i, L_j, L_k, la case noire peut être positionnée de trois façons possibles ; ce sont les tiroirs. Donc d'après le principe des tiroirs, il existe au moins deux colonnes dans lesquelles, en considérant les lignes L_i, L_j, L_k, la case noire est positionnée de la même façon. En considérant les cases blanches de ces deux colonnes, la démonstration est achevée.

4. Soit n le nombre cherché ; ce sont les chaussettes. Il y a douze mois ; ce sont les tiroirs. Nous avons évidemment $n > 12$ (sinon nous ne sommes pas sûrs qu'au moins cinq personnes soient nées le même mois) donc d'après le principe des tiroirs, il existe un tiroir contenant au moins $\left\lceil \frac{n}{12} \right\rceil$ chaussettes. $\left\lceil \frac{n}{12} \right\rceil = 5 \implies 5 - 1 < \frac{n}{12}$ donc la plus petite valeur de n est 49.

$\square$