Probabilité que deux éléments d'un groupe commutent

Samuel Rochetin

Dimanche 29 juin 2014

Problème. *Montrer que la probabilité que deux éléments d'un groupe fini non abélien commutent est inférieure ou égale à* $\frac{5}{8}$. *Cas d'égalité ?*

Solution. Soit $n \coloneqq \#G$.

Tout élément commute avec lui-même donc l'expérience aléatoire consiste à tirer avec remise 2 éléments d'un ensemble à n éléments.

L'univers est donc constitué des n^2 couples possibles.

Soit $E \coloneqq \{(x,y) \in G^2, xy = yx\}$ l'évènement « deux éléments de G commutent ».

Nous nous plaçons dans le cadre de l'équiprobabilité donc $p(E) = \frac{\#E}{n^2}$.

$\forall x \in G$, notons $C_x \coloneqq \{y \in G, xy = yx\}$ le centralisateur de x.

Dénombrer les éléments de C_x revient à dénombrer les couples (x,y) d'éléments qui commutent, à x fixé.

Donc $\#E = \sum_{x \in G} \#C_x$.

Intuitivement, le centre de G joue un rôle particulier.

Donc $\#E = \sum_{x \in Z(G)} \#C_x + \sum_{x \notin Z(G)} \#C_x$.

Or, $C_x = \{y \in G, yxy^{-1} = x\}$ est aussi le stabilisateur de x pour l'action du groupe G sur lui-même par conjugaison.

Donc d'après le cours, $\#C_x = \frac{\#G}{\#\mathcal{O}_x}$, où $\mathcal{O}_x$ est l'orbite de x pour cette action de groupe.

Or, d'après le cours, pour cette action de groupe, $x \in Z(G) \iff \#\mathcal{O}_x = 1$ donc $x \notin Z(G) \iff \#\mathcal{O}_x \geq 2$.

Donc $\sum_{x \in Z(G)} \#C_x = \sum_{x \in Z(G)} \#G = n\#Z(G)$ et $\sum_{x \notin Z(G)} \#C_x \leq \sum_{x \notin Z(G)} \frac{\#G}{2} = \frac{n(\#G - \#Z(G))}{2}$.

D'où $p(E) \leq \frac{1}{2}\frac{\#Z(G)}{\#G} + \frac{1}{2}$.

D'après le cours, $G/Z(G)$ est cyclique $\implies G$ est abélien.

Donc par contraposée, ici, $G/Z(G)$ n'est pas cyclique.

Or, tout groupe d'ordre premier est cyclique, donc par contraposée, $\#G/Z(G)$ n'est pas premier.

Et G n'est pas abélien donc $G \neq Z(G)$.

Donc $\#G/Z(G) \geq 4$.

Or, d'après le théorème de Lagrange, $\#G/Z(G) = \dfrac{\#G}{\#Z(G)}$.

Donc $\dfrac{\#Z(G)}{\#G} \leq \dfrac{1}{4}$.

Au final, $p(E) \leq \dfrac{5}{8}$.

On peut vérifier que le cas d'égalité est atteint en particulier pour le groupe des quaternions et le groupe des isométries du carré. $\square$