Introduction aux probabilités

Samuel Rochetin

Mercredi 6 juin 2018

1 Expérience aléatoire, issue, univers

Définition 1. *On appelle **expérience aléatoire** toute expérience :*
- ***reproductible** dans les mêmes conditions ;*
- *dont les résultats possibles sont **connus** ;*
- *dont le résultat est **imprédictible**.*

Définition 2. *Pour toute expérience aléatoire, on appelle :*
- ***issue** tout résultat possible ;*
- ***univers** et on note Ω l'ensemble des issues.*

Remarque 1. *L'ensemble Ω n'est jamais vide.*

Exemple 1. *Le lancer d'un dé constitue une expérience aléatoire d'univers* $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Dans la suite du chapitre, les définitions, remarques, propriétés et propositions concernent toute expérience aléatoire en général. Les exemples ne concernent que l'expérience aléatoire particulière du lancer d'un dé.

2 Évènements

Définition 3. *On appelle **évènement** tout ensemble d'issues. On dit que chacune de ces issues **réalise** cet évènement.*

Remarque 2. *Autrement dit, tout évènement est un sous-ensemble de Ω et ses éléments sont des issues.*

Exemple 2. *Soit A l'évènement « obtenir un nombre pair ».* $A = \{2; 4; 6\}$.

2.1 Évènements impossibles, élémentaires, certains

Définition 4. *On appelle évènement :*
- ***impossible** tout évènement qu'aucune issue de Ω ne réalise ;*
- ***élémentaire** tout évènement réalisé par une seule issue de Ω ;*
- ***certain** tout évènement réalisé par toutes les issues de Ω.*

Remarque 3. *Tout évènement impossible est l'ensemble vide* $\emptyset$. *Tout évènement certain est l'univers* Ω.

Exemple 3. *Soit* B *l'évènement « obtenir* 7 *». Aucune issue de* Ω *ne réalise* B *donc* $B = \emptyset$ *est un évènement impossible.*

Exemple 4. *Soit* C *l'évènement « obtenir* 6 *». Une seule issue de* Ω *réalise* C *donc* $C = \{6\}$ *est un évènement élémentaire.*

Exemple 5. *Soit* D *l'évènement « obtenir un entier naturel ».* D *est réalisé par toutes les issues de* Ω *donc* $D = \Omega$ *est un évènement certain.*

2.2 Évènement contraire

Définition 5. *Pour tout évènement* A*, on appelle* ***évènement contraire*** *de* A*, on note* $\overline{A}$ *et on lit «* A *barre » l'ensemble des issues de* Ω *n'appartenant pas à* A*.*

Exemple 6. *Soit* E *l'évènement « obtenir* 1, 2 *ou* 3 *».* $\overline{E} = \{4; 5; 6\}$.

2.3 Réunion d'évènements

Définition 6. *Soient* A, B *deux évènements. On appelle* ***réunion*** *de* A *et* B*, on note* $A \cup B$ *et on lit «* A *union* B *» l'ensemble des issues de* Ω *appartenant à* A *ou à* B*.*

Exemple 7. *Soient* F *l'évènement « obtenir* 1 *ou* 2 *» et* G *l'évènement « obtenir* 2, 3 *ou* 5 *».* $F \cup G = \{1; 2; 3; 5\}$.

Proposition 1. *Pour tout évènement* A*,*

$$\boxed{A \cup \overline{A} = \Omega.}$$

Démonstration. Soit $x \in A \cup \overline{A}$. Alors x est une issue de l'expérience aléatoire donc $x \in \Omega$. Donc $A \cup \overline{A} \subset \Omega$. Réciproquement, soit $x \in \Omega$. Si $x \in A$, alors $x \in A \cup \overline{A}$. Sinon, d'après la définition 5, $x \in \overline{A}$ donc $x \in A \cup \overline{A}$. Donc $\Omega \subset A \cup \overline{A}$. Par double inclusion, $A \cup \overline{A} = \Omega$. □

Remarque 4. *Autrement dit, la réunion d'un évènement et de son contraire est égale à l'univers.*

Exemple 8. *Dans l'exemple 6,* $E \cup \overline{E} = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\} = \Omega$.

Proposition 2. *La réunion des évènements élémentaires est égale à* Ω*.*

Démonstration. La réunion des évènements élémentaires est un sous-ensemble de Ω par définition. Réciproquement, soit $x \in \Omega$. Alors $x \in \{x\}$. Or, $\{x\}$ est un évènement élémentaire donc x appartient à la réunion des évènements élémentaires. Par double inclusion, la proposition est démontrée. □

Exemple 9. *Les évènements élémentaires sont* $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$ *donc* $\{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \cup \{4\} \cup \{5\} \cup \{6\} = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\} = \Omega$.

2.4 Intersection d'évènements

Définition 7. *Soient A, B deux évènements. On appelle* ***intersection*** *de A et B, on note $A \cap B$ et on lit « A inter B » l'ensemble des issues de Ω appartenant à A et à B.*

Exemple 10. *Dans l'exemple 7, $F \cap G = \{2\}$.*

2.5 Évènements incompatibles

Définition 8. *Soient A, B deux évènements. On dit que A et B sont* ***incompatibles*** *si leur intersection est vide, c'est-à-dire si*

$$\boxed{A \cap B = \emptyset.}$$

Exemple 11. *Dans l'exemple 4 et l'exemple 6, $C \cap E = \emptyset$ donc les évènements C et E sont incompatibles.*

Proposition 3. *Pour tout évènement A,*

$$\boxed{A \cap \overline{A} = \emptyset.}$$

Démonstration. C'est évident, par définition de l'évènement contraire et parce que l'ensemble vide est inclus dans tout ensemble. □

Remarque 5. *Autrement dit, tout évènement et son contraire sont incompatibles.*

Exemple 12. *Dans l'exemple 6, $E \cap \overline{E} = \emptyset$.*

3 Définition des probabilités

Définition 9. *Soient une expérience aléatoire d'univers Ω et $\mathcal{A}$ l'ensemble des évènements. On appelle* ***probabilité*** *toute fonction $p : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ telle que :*

— *pour tout évènement A,*

$$\boxed{0 \leq p(A) \leq 1}$$

—

$$\boxed{p(\Omega) = 1}$$

— *pour toute suite d'évènements $A_1, A_2, \ldots$ deux à deux incompatibles,*

$$p(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = p(A_1) + p(A_2) + \ldots$$

Remarque 6. *Par abus de langage, on appelle probabilité de l'évènement A le nombre $p(A)$.*

Remarque 7. *En quelque sorte, la probabilité d'un évènement exprime la chance qu'a un évènement de se produire.*

Remarque 8. *Soient A, B deux évènements incompatibles. D'après la définition 9,*

$$\boxed{p(A \cup B) = p(A) + p(B).}$$

Propriété 1. *Soient une expérience aléatoire et p une probabilité.*

$$\boxed{p(\emptyset) = 0}$$

Démonstration. $\emptyset \cup \Omega = \Omega$ donc $p(\emptyset \cup \Omega) = p(\Omega)$. Or, $\emptyset$ et Ω sont incompatibles donc d'après la définition 9, $p(\emptyset \cup \Omega) = p(\emptyset) + p(\Omega)$. Ainsi, $p(\emptyset) + p(\Omega) = p(\Omega) \iff p(\emptyset) = 0$. □

Propriété 2. *Pour tout évènement A,*

$$\boxed{p\left(\overline{A}\right) = 1 - p(A).}$$

Démonstration. A et $\overline{A}$ sont incompatibles donc il vient :

$$\begin{aligned}
& A \cup \overline{A} = \Omega \\
\implies & p\left(A \cup \overline{A}\right) = p(\Omega) \\
\implies & p(A) + p\left(\overline{A}\right) = 1 \\
\iff & p\left(\overline{A}\right) = 1 - p(A)
\end{aligned}$$

□

4 Cas d'équiprobabilité sur un univers fini

Définition 10. *Soient une expérience aléatoire d'univers* ***fini*** *et une probabilité. On dit qu'il y a* ***équiprobabilité*** *si les évènements élémentaires ont tous la même probabilité.*

Proposition 4. *Soient une expérience aléatoire d'univers Ω* ***fini*** *et p une probabilité telle qu'il y a* ***équiprobabilité****. Pour tout évènement élémentaire ω,*

$$p(\omega) = \frac{1}{\textit{nombre d'éléments de } \Omega}$$

Démonstration. Soient n le nombre d'éléments de Ω et $\omega_1, \ldots, \omega_n$ les évènements élémentaires. Les évènements élémentaires sont incompatibles deux à deux donc il vient :

$$\begin{aligned}
& \omega_1 \cup \cdots \cup \omega_n = \Omega \\
\implies & p(\omega_1 \cup \cdots \cup \omega_n) = p(\Omega) \\
\iff & p(\omega_1) + \cdots + p(\omega_n) = 1 \\
\implies & n \times p(\omega_1) = 1 && \text{équiprobabilité} \\
\iff & p(\omega_1) = \frac{1}{n} \\
\iff & p(\omega_1) = \frac{1}{\text{nombre d'éléments de } \Omega}
\end{aligned}$$

$\square$

Proposition 5. *Soient une expérience aléatoire d'univers* Ω ***fini****,* p *une probabilité telle qu'il y a* ***équiprobabilité*** *et* A *un évènement.*

$$\boxed{p(A) = \frac{\textit{nombre d'éléments de } A}{\textit{nombre d'éléments de } \Omega}}$$

Démonstration. Soient m le nombre d'éléments de A et $\omega_1, \ldots, \omega_m$ les évènements élémentaires dont les issues réalisent A. Les évènements élémentaires sont incompatibles deux à deux donc il vient :

$$\begin{aligned}
& A = \omega_1 \cup \cdots \cup \omega_m \\
\Longrightarrow\ & p(A) = p(\omega_1 \cup \cdots \cup \omega_m) \\
\Longleftrightarrow\ & p(A) = p(\omega_1) + \cdots + p(\omega_m) \\
\Longleftrightarrow\ & p(A) = m \times p(\omega_1) && \text{équiprobabilité} \\
\Longleftrightarrow\ & p(A) = m \times \frac{1}{\text{nombre d'éléments de } \Omega} && \text{proposition précédente} \\
\Longleftrightarrow\ & p(A) = \frac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } \Omega}
\end{aligned}$$

$\square$

Exemple 13. *On dit qu'un dé est équilibré s'il y a équiprobabilité. Supposons le dé équilibré. Dans l'exemple 2,* $p(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$*. En quelque sorte, il y a une chance sur deux d'obtenir un nombre pair.*