Pseudo-anneaux de carré nul

Samuel Rochetin

Vendredi 15 mars 2019

Définition 1. *On appelle pseudo-anneau toute structure algébrique vérifiant les axiomes d'un anneau unitaire, sauf qu'on n'exige pas la présence d'une unité.*

Remarque 1. *Tout anneau unitaire est donc un pseudo-anneau.*

Définition 2. *On appelle pseudo-anneau de carré nul tout pseudo-anneau sur lequel la loi multiplicative est nulle.*

Définition 3. *On appelle morphisme de pseudo-anneaux toute application f entre deux pseudo-anneaux A, B vérifiant les axiomes d'un morphisme d'anneaux unitaires, sauf qu'on n'exige pas l'axiome $f(1_A) = 1_B$.*

Définition 4. *On appelle isomorphisme de pseudo-anneaux tout morphisme de pseudo-anneaux bijectif.*

Exercice.

1. *Donner un exemple de pseudo-anneau qui n'est pas un anneau unitaire.*
2. *Montrer qu'il existe un unique anneau unitaire de carré nul.*
3. *Soient A, B deux pseudo-anneaux isomorphes. Montrer que A est de carré nul si et seulement si B est de carré nul.*

Solution.

1. Il suffit d'exhiber une structure algébrique vérifiant les axiomes d'un anneau unitaire sauf celui de la présence d'une unité. $2\mathbb{Z}$ convient.
2. Soit A un anneau unitaire de carré nul. Par définition de l'unité, $\forall x \in A, 1 \times x = x$. Or, A est de carré nul donc $1 \times x = 0$. Donc $x = 0$ et $A = \{0\}$. On vérifie que $\{0\}$ est un anneau unitaire de carré nul (dans ce cas, $1 = 0$). L'anneau nul est donc l'unique anneau unitaire de carré nul.
3. Notons $\times_A$ et $\times_B$ les lois multiplicatives respectives de A et B et $f : A \to B$ un isomorphisme de pseudo-anneaux. Supposons A de carré nul. f est surjectif donc $\forall (b, b') \in B^2, \exists (a, a') \in A^2, b = f(a), b' = f(a')$. Ainsi, $b \times_B b' = f(a) \times_B f(a') = f(a \times_A a') = f(0_A) = 0_B$. Donc B est de carré nul. La réciproque est claire par symétrie du problème en A et B via f^{-1}.

$\square$