Puissances entières

Samuel Rochetin

Mercredi 6 juin 2018

1 Trois définitions fondamentales

Définition 1. *Soient a un réel et n un entier naturel non nul. On lit « a puissance n » et on note a^n le nombre défini par*

$$\boxed{a^n := \underbrace{a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}}.}$$

Exemple 1. $10^1 = 10$. *Dans cet exemple,* $a = 10, n = 1$.

Exemple 2. $0^2 = 0 \times 0 = 0$. *Dans cet exemple,* $a = 0, n = 2$.

Exemple 3. $(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$. *Dans cet exemple,* $a = -2, n = 3$.

Exemple 4. $3^5 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 243$. *Dans cet exemple,* $a = 3, n = 5$.

Définition 2 (Convention relative aux produits vides)**.** *Soit a un réel.*

$$\boxed{a^0 := 1}$$

Exemple 5. $0^0 = 1$. *Dans cet exemple,* $a = 0$.

Exemple 6. $11^0 = 1$. *Dans cet exemple,* $a = 11$.

Exemple 7. $(-7)^0 = 1$. *Dans cet exemple,* $a = -7$.

Définition 3. *Soient a un réel non nul et n un entier naturel.*

$$\boxed{a^{-n} := \frac{1}{a^n}}$$

Remarque 1. *Pour tout réel a, $a^{-0} = a^0 = 1$ et $\frac{1}{a^0} = \frac{1}{1} = 1$ donc la définition 3 est cohérente avec la définition 2.*

Remarque 2. *Supposons que $a = 0$. Si $n = 0$, alors la remarque 1 s'applique. En revanche, si n est un entier naturel non nul, alors $a^n = 0^n = 0$ donc le nombre $\frac{1}{a^n}$ n'est pas défini (division par 0). Voilà pourquoi a est supposé non nul dans la définition 3.*

Exemple 8. $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25} = 0{,}04$. *Dans cet exemple, $a = 5, n = 2$.*

Exemple 9. $(-2)^{-1} = \frac{1}{(-2)^1} = \frac{1}{-2} = -0{,}5$. *Dans cet exemple, $a = -2, n = 1$.*

2 Inverse d'un réel non nul

Proposition 1. *Soit a un réel non nul. Il existe un unique réel x tel que $a \times x = x \times a = 1$.*

Démonstration. Montrons l'existence. Par commutativité et d'après le cours sur les fractions, $\frac{1}{a} \times a = a \times \frac{1}{a} = 1$. Donc $x = \frac{1}{a}$ convient. Montrons l'unicité. Supposons qu'il existe deux réels x_1 et x_2 tels que $a \times x_1 = x_1 \times a = a \times x_2 = x_2 \times a = 1$. Par associativité, $x_1 \times a \times x_2 = x_1 \times (a \times x_2) = x_1 \times 1 = x_1$ et $x_1 \times a \times x_2 = (x_1 \times a) \times x_2 = 1 \times x_2 = x_2$ donc $x_1 = x_2$. □

Définition 4. *Soit a un réel non nul. On appelle* ***inverse*** *de a et on note a^{-1} l'unique réel tel que*

$$\boxed{a \times a^{-1} = a^{-1} \times a = 1.}$$

Remarque 3. 0 *n'admet aucun inverse. En effet, si 0 admet un inverse x, alors $0 \times x = 1$, d'après la définition 4. Or, $0 \times x = 0$. Donc $1 = 0$. Absurde. Voilà pourquoi a est supposé non nul dans la définition 4.*

Remarque 4. a^{-1} *est un réel non nul. En effet, si $a^{-1} = 0$, alors $a \times 0 = 1$, d'après la définition 4. Or, $a \times 0 = 0$. Donc $1 = 0$. Absurde. Ainsi, 0 n'est l'inverse d'aucun réel non nul.*

Remarque 5. *a est l'inverse de a^{-1}. En effet, d'après la remarque 4, a et a^{-1} jouent un rôle symétrique dans la définition 4.*

Proposition 2. *Soit a un réel non nul.*

$$\boxed{a^{-1} = \frac{1}{a}}$$

Démonstration. D'après la preuve de la proposition 1, $\frac{1}{a}$ convient comme inverse de a donc par unicité, c'est l'inverse de a. □

Remarque 6. *Ainsi, pour $n = 1$, la définition 4 est cohérente avec la définition 3.*

Exemple 10. *L'inverse de 1 est $1^{-1} = \frac{1}{1} = 1$. Dans cet exemple, $a = 1$.*

Exemple 11. *L'inverse de $-0{,}08$ est $(-0{,}08)^{-1} = \frac{1}{-0{,}08} = -12{,}5$. Dans cet exemple, $a = -0{,}08$.*

Proposition 3 (Inverse d'un quotient non nul)**.** *Soient a, b deux réels non nuls.*

$$\boxed{\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}}$$

Démonstration. a et b sont non nuls donc les quotients $\frac{a}{b}$ et $\frac{b}{a}$ sont définis et non nuls. Par commutativité, $\frac{b}{a} \times \frac{a}{b} = \frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = \frac{\cancel{a} \times \cancel{b}}{\cancel{b} \times \cancel{a}} = 1$ donc la définition 4 et la proposition 2 donnent : $\frac{b}{a}$ est l'inverse de $\frac{a}{b}$ et s'écrit $\frac{1}{\frac{a}{b}}$. □

Remarque 7. *Autrement dit,* $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$.

Exemple 12. *L'inverse de* $\frac{1}{\pi}$ *est* $\frac{\pi}{1} = \pi$. *Dans cet exemple,* $a = 1, b = \pi$.

Exemple 13. $\frac{1}{-\frac{8}{11}} = -\frac{11}{8} = -1{,}275$. *Dans cet exemple,* $a = \pm 8, b = \mp 11$.

Exemple 14. $\left(\frac{7}{2}\right)^{-1} = \frac{2}{7}$. *Dans cet exemple,* $a = 7, b = 2$.

Propriété 1. *Soient a un réel non nul et n un entier naturel.*

$$\boxed{\frac{1}{a^{-n}} = a^n}$$

Démonstration n°1. D'après la définition 3 et la proposition 2, a^{-n} est l'inverse de a^n. Donc d'après la remarque 5, a^n est l'inverse de a^{-n}. Donc d'après la proposition 2, $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$. □

Démonstration n°2.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a^{-n}} &= \frac{1}{\frac{1}{a^n}} && \text{définition 3} \\
&= \frac{a^n}{1} && \text{proposition 3} \\
&= a^n
\end{aligned}$$

□

Remarque 8. *Autrement dit,* $(a^{-n})^{-1} = a^n$.

Exemple 15. $\frac{1}{5^{-4}} = 5^4 = 625$. *Dans cet exemple,* $a = 5, n = 4$.

Exemple 16. *L'inverse de* $1{,}2^{-3}$ *est* $1{,}2^3 = 1{,}44$. *Dans cet exemple,* $a = 1{,}2, n = 3$.

Exemple 17. $\left((-7)^{-1}\right)^{-1} = (-7)^1 = -7$. *Dans cet exemple,* $a = -7, n = 1$.

3 Propriétés algébriques des puissances

Propriété 2. *Soient* a *un réel et* m, n *deux entiers naturels.*

$$\boxed{a^m \times a^n = a^{m+n}}$$

Démonstration. Si $m = 0$ ou $n = 0$, alors il suffit d'appliquer la définition 2. Supposons que $m \neq 0$ et $n \neq 0$.

$$\begin{aligned} a^{m+n} &= \underbrace{a \times \cdots \times a}_{m+n \text{ fois}} && \text{définition 1} \\ &= \underbrace{a \times \cdots \times a}_{m \text{ fois}} \times \underbrace{a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}} \\ &= a^m \times a^n && \text{associativité et définition 1} \end{aligned}$$

□

Exemple 18. $2^{3+4} = 2^7 = 128$ *et* $2^3 \times 2^4 = 8 \times 16 = 128$. *Dans cet exemple,* $a = 2, m = 3, n = 4$.

Exemple 19. $(-3)^{1+2} = (-3)^3 = -27$ *et* $(-3)^1 \times (-3)^2 = -3 \times 9 = -27$. *Dans cet exemple,* $a = -3, m = 1, n = 2$.

Propriété 3. *Soient* a *un réel non nul et* m, n *deux entiers naturels.*

$$\boxed{a^{-m} \times a^{-n} = a^{-m-n}}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} a^{-m-n} &= a^{-(m+n)} \\ &= \frac{1}{a^{m+n}} && \text{définition 3} \\ &= \frac{1}{a^m \times a^n} && \text{propriété 1} \\ &= \frac{1}{a^m} \times \frac{1}{a^n} && \text{produit de fractions} \\ &= a^{-m} \times a^{-n} && \text{définition 3} \end{aligned}$$

□

Propriété 4. *Soient* a *un réel non nul et* m, n *deux entiers naturels.*

$$\boxed{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$$

Démonstration. Supposons que $0 \leq m - n$. Par hypothèse, a est non nul donc a^n est non nul donc le nombre $\frac{a^n}{a^n}$ est défini (pas de division par 0) et vaut 1.

$$\begin{aligned}
a^{m-n} &= a^{m-n} \times 1 \\
&= a^{m-n} \times \frac{a^n}{a^n} \\
&= \frac{a^{m-n} \times a^n}{a^n} \\
&= \frac{a^{m-n+n}}{a^n} && \text{propriété 1} \\
&= \frac{a^m}{a^n}
\end{aligned}$$

Supposons que $m - n < 0$, c'est-à-dire que $0 < n - m$.

$$\begin{aligned}
a^{m-n} &= a^{-(n-m)} \\
&= \frac{1}{a^{n-m}} && \text{définition 3} \\
&= \frac{1}{\frac{a^n}{a^m}} && \text{cas précédent} \\
&= \frac{a^m}{a^n} && \text{inverse d'un quotient non nul}
\end{aligned}$$

□

Remarque 9. *Si $m = n$, alors $a^{m-n} = a^0 = \frac{a^n}{a^n} = 1$ donc la propriété 4 est cohérente avec la définition 2.*

Remarque 10. *Si $m = 0$, alors $a^{0-n} = a^{-n} = \frac{a^0}{a^n} = \frac{1}{a^n}$ donc la propriété 4 est cohérente avec la définition 3.*

Exemple 20. $7^{4-2} = 7^2 = 49$ *et* $\frac{7^4}{7^2} = \frac{7 \times 7 \times \cancel{7} \times \cancel{7}}{\cancel{7} \times \cancel{7}} = 7^2 = 49$. *Dans cet exemple, $a = 7, m = 4, n = 2$.*

Exemple 21. $9^{1-4} = 9^{-3}$ *et* $\frac{9^1}{9^4} = \frac{\cancel{9}}{9 \times 9 \times 9 \times \cancel{9}} = \frac{1}{9^3} = 9^{-3}$. *Dans cet exemple, $a = 9, m = 1, n = 4$.*

Propriété 5. *Soient a un réel non nul et m, n deux entiers relatifs.*

$$\boxed{(a^m)^n = a^{m \times n}}$$

Démonstration. Si $m = 0$ ou $n = 0$, alors il suffit d'appliquer la définition 2. Supposons que $0 < m$ et $0 < n$.

$$\begin{aligned}
(a^m)^n &= \underbrace{a^m \times \cdots \times a^m}_{n \text{ fois}} && \text{définition 1} \\
&= a^{\overbrace{m + \cdots + m}_{n \text{ fois}}} && \text{propriété 1} \\
&= a^{n \times m} \\
&= a^{m \times n} && \text{commutativité}
\end{aligned}$$

Supposons que $m < 0$ et $0 < n$. Posons $p \coloneqq -m$.

$$\begin{aligned}
(a^m)^n &= \left(a^{-p}\right)^n && m = -p \\
&= \underbrace{a^{-p} \times \cdots \times a^{-p}}_{n \text{ fois}} && \text{définition 1} \\
&= a^{\overbrace{-p - \cdots - p}_{n \text{ fois}}} && \text{propriété 3} \\
&= a^{n \times (-p)} \\
&= a^{m \times n} && -p = m \text{ et commutativité}
\end{aligned}$$

Supposons que $m \neq 0$ et $n < 0$. Posons $q \coloneqq -n$.

$$\begin{aligned}
(a^m)^n &= (a^m)^{-q} && n = -q \\
&= \frac{1}{(a^m)^q} && \text{définition 3} \\
&= \frac{1}{a^{m \times q}} && 0 < q \text{ et l'un des deux cas précédents, selon le signe de } m \\
&= a^{-(m \times q)} && \text{définition 3 ou propriété 1, selon le signe de } m \\
&= a^{m \times (-q)} \\
&= a^{m \times n} && -q = n
\end{aligned}$$

□

Remarque 11. *Par commutativité,* $m \times n = n \times m$ *donc* $(a^m)^n = (a^n)^m$.

Remarque 12. *Ainsi,* $(a^{-n})^{-1} = a^{-n \times (-1)} = a^n$ *donc la propriété 5 est cohérente avec la remarque 8.*

Propriété 6. *Soient* a, b *deux réels non nuls et* n *un entier relatif.*

$$\boxed{a^n \times b^n = (a \times b)^n}$$

Démonstration. Si $n = 0$, alors il suffit d'appliquer la définition 2. Supposons que $0 < n$.

$$\begin{aligned}
(a \times b)^n &= \underbrace{(a \times b) \times \cdots \times (a \times b)}_{n \text{ fois}} && \text{définition 1} \\
&= \underbrace{a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}} \times \underbrace{b \times \cdots \times b}_{n \text{ fois}} && \text{associativité et commutativité} \\
&= a^n \times b^n && \text{définition 1}
\end{aligned}$$

Supposons que $n < 0$. Posons $p \coloneqq -n$.

$$\begin{aligned}
(a \times b)^n &= (a \times b)^{-p} && n = -p \\
&= \frac{1}{(a \times b)^p} && \text{définition 3} \\
&= \frac{1}{a^p \times b^p} && \text{cas précédent} \\
&= \frac{1}{a^p} \times \frac{1}{b^p} \\
&= a^{-p} \times b^{-p} && \text{définition 3} \\
&= a^n \times b^n && -p = n
\end{aligned}$$

□

Remarque 13. *Si $a = b$, alors $(a \times b)^n = a^n \times b^n \iff (a \times a)^n = a^n \times a^n \iff \left(a^2\right)^n = \left(a^n\right)^2$ donc la propriété 6 est cohérente avec la remarque 11.*

Exemple 22. $(-5 \times 2)^{-3} = (-10)^{-3} = \dfrac{1}{(-10)^3} = \dfrac{1}{-1000} = -0{,}001$ *et* $(-5)^{-3} \times 2^{-3} = \dfrac{1}{(-5)^3} \times \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{-125} \times \dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{-125 \times 8} = \dfrac{1}{-1000} = -0{,}001$. *Dans cet exemple, $a = -5, b = 2, n = -3$.*

Propriété 7. *Soient a, b deux réels non nuls et n un entier relatif.*

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a}{b}\right)^n &= \left(a \times \frac{1}{b}\right)^n \\
&= \left(a \times b^{-1}\right)^n && \text{proposition 2} \\
&= a^n \times \left(b^{-1}\right)^n && \text{propriété 6} \\
&= a^n \times b^{-n} && -1 \times n = -n \text{ et propriété 5} \\
&= a^n \times \frac{1}{b^n} && \text{définition 3} \\
&= \frac{a^n}{b^n}
\end{aligned}$$

$\square$

Exemple 23. $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ *et* $\frac{1^3}{2^3} = \frac{1}{8}$. *Dans cet exemple,* $a = 1, b = 2, n = 3$.

Exemple 24. $\left(\frac{-3}{5}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{-3}{5}\right)^2} = \frac{1}{\frac{-3}{5} \times \frac{-3}{5}} = \frac{1}{\frac{9}{25}} = \frac{25}{9}$ *et* $\frac{(-3)^{-2}}{5^{-2}} = \frac{5^2}{(-3)^2} = \frac{25}{9}$. *Dans cet exemple,* $a = -3, b = 5, n = -2$.