Groupe des quaternions

Samuel Rochetin

Mercredi 20 janvier 2016

Problème. *Rappelons que $GL_2(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices inversibles 2×2 à coefficients complexes et que, muni de la multiplication des matrices, c'est un groupe. Dans tout cet exercice, on pose :*

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

1. *Quels sont les ordres de A, B, C ?*
2. *Calculer $AB, A^2, AB + BA$. Désormais, on admettra les relations suivantes :*

$$BC = A, \quad CA = B, \quad B^2 = C^2 = -I, \quad BC + CB = CA + AC = 0.$$

3. *On note $H := \langle A, B, C \rangle$ le sous-groupe de $GL_2(\mathbb{C})$ engendré par A, B, C, appelé groupe des quaternions. Montrer que*

$$H = \{I, -I, A, -A, B, -B, C, -C\}$$

   et expliquer succinctement pourquoi ceci est cohérent avec le résultat de la question 1.
4. *Montrer que H n'est pas commutatif.*
5. *Déterminer tous les sous-groupes de H et montrer qu'ils sont tous distingués dans H.*
6. *On note $K := \{I, -I\}$. Décrire H/K.*
7. *Déterminer $Z(H)$, le centre de H.*

Question 1. Comme $A^2 = B^2 = C^2 = -I$, on trouve $A^4 = B^4 = C^4 = I$, donc l'ordre de A (respectivement B, C) divise 4. Or, ce n'est ni 1, ni 2, car $A \neq I$ et $A^2 \neq I$. Donc l'ordre de A vaut 4, de même pour B et C.

Question 2. Après calcul, $AB = C, A^2 = -I, AB + BA = 0$. En particulier, l'inverse de A est donc $A^{-1} = -A$. De même pour B, C.

Question 3. Posons $L := \{I, -I, A, -A, B, -B, C, -C\}$. Montrons tout d'abord que L est un sous-groupe de $GL_2(\mathbb{C})$. $L \subset GL_2(\mathbb{C})$ puisque chaque élément de L est une matrice inversible 2×2 à coefficients complexes. $I \in L$, et I est l'élément neutre de $GL_2(\mathbb{C})$ pour le produit matriciel. D'après la question précédente, L est stable par produit matriciel et par passage à l'inverse. L est donc un sous-groupe de $GL_2(\mathbb{C})$. Par définition, H est le plus petit sous-groupe (au sens de l'inclusion) de $GL_2(\mathbb{C})$ contenant A, B, C, et L est un sous-groupe de $GL_2(\mathbb{C})$ contenant A, B, C, donc $H \subset L$. Or, comme H est un groupe contenant A, il doit contenir $A^2 = -I$, et l'inverse de A, c'est-à-dire $-A$. De même pour $-B, -C$. D'où $L \subset H$. Au final, $H = L$. Ceci est cohérent avec le résultat de la question 1. En effet, H étant un groupe fini d'ordre 8, le théorème de Lagrange s'applique et on a bien l'ordre de A (respectivement B, C) qui divise l'ordre du groupe H puisque 4 divise 8.

Question 4. D'après la question 1., $AB = -BA$. Donc $AB \neq BA$. Donc H n'est pas commutatif.

Question 5. Les diviseurs positifs de 8 sont $1, 2, 4, 8$. Les sous-groupes d'ordre 1 et 8 sont $\{I\}$ et H. Déterminons le(s) sous-groupe(s) d'ordre 2. Si on veut construire un sous-groupe contenant A, il contient nécessairement $-A$, donc avec I cela fait au moins 3 éléments. Un sous-groupe d'ordre 2 ne contient donc ni A, ni $-A$ etc. On peut alors vérifier que $\{I, -I\}$ est un sous-groupe de H, c'est le seul d'ordre 2. Et comme $(-I)^2 = I$, on a $\{I, -I\} = \langle -I \rangle$. Déterminons le(s) sous-groupe(s) d'ordre 4. Si on veut construire un sous-groupe contenant A et B, il contient nécessairement $-A$ et $-B$, donc avec I cela fait au moins 5 éléments. Un sous-groupe d'ordre 4 contient donc A ou (exclusif) B (ou C). On peut alors vérifier que $\{I, -I, A, -A\}, \{I, -I, B, -B\}, \{I, -I, C, -C\}$ sont des sous-groupes d'ordre 4, ce sont les seuls d'après notre argument de construction. Comme $A^2 = -I, A^3 = -A, A^4 = I$ (de même pour B, C), on a $\{I, -I, A, -A\} = \langle A \rangle, \{I, -I, B, -B\} = \langle B \rangle, \{I, -I, C, -C\} = \langle C \rangle$. Les sous-groupes d'ordre 2 et 4 sont donc cycliques. $\{I\}$, $\{I, -I\}$ et H sont évidemment distingués dans H. Montrons que $\{I, -I, A, -A\}$ est distingué dans H. D'après le résultat de la question 2. et les relations admises, $BAB^{-1} = BA(-B) = -BAB = -BC = -A \in \{I, -I, A, -A\}$ et $CAC^{-1} = CA(-C) = -CAC = -BC = -A \in \{I, -I, A, -A\}$. De même en remplaçant A par $-A$. Donc $\{I, -I, A, -A\}$ est distingué dans H. Même principe pour $\{I, -I, B, -B\}$ et $\{I, -I, C, -C\}$.

Question 6. Comme K est distingué dans H, H/K est un groupe. Déterminons les classes à gauche des éléments de H, c'est-à-dire les éléments de H/K. $\overline{I} = IK = \{I, -I\}$, de même $\overline{-I} = -IK = \{I, -I\}$. Au passage, on retrouve bien ici la surjectivité de la projection canonique, puisque I et $-I$ s'envoient sur la même classe. De même, on obtient $\overline{A} = AK = \{A, -A\} = \overline{-A}, \overline{B} = BK = \{B, -B\} = \overline{-B}, \overline{C} = CK = \{C, -C\} = \overline{-C}$. H/K est donc un groupe d'ordre 4. On a $\overline{A}^2 = \overline{A^2} = \overline{-I} = \overline{I}$, donc $\overline{A}$ est d'ordre 2. Ceci se généralise aisément, et chaque élément de H/K différent du neutre est ainsi d'ordre 2. Remarque : H/K est alors isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Question 7. D'après le résultat dans la question 2. est les relations admises, $Z(H) = K$.