$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Samuel Rochetin

Vendredi 22 janvier 2016

Résumé

L'exercice suivant est classique : « montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel ». Le but de ce document est de présenter cinq preuves différentes, accessibles à un élève de terminale S, spécialité mathématique.

1 Préambule

1.1 Introduction de $\sqrt{2}$

Notons a la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1. D'après le théorème de Pythagore, $a^2 = 2$. Nous cherchons donc un nombre $a > 0$ de carré 2.

Ce nombre a ne peut pas être entier. En effet, si un entier décrit $\mathbb{N}$, alors son carré prend les valeurs $0, 1, 4, 9, 16 \ldots$ et 2 n'apparaît pas. Comme $1^2 = 1 < 2$ et $2^2 = 4 > 2$, le nombre a cherché est compris strictement entre 1 et 2.

Notons $a = \sqrt{2}$. Comme $\sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$, nous pouvons penser que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Mais nous allons voir qu'il n'en est rien : on dit que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

1.2 Raisonnement par l'absurde

Les preuves présentées ici reposent toutes sur un raisonnement par l'absurde qui commence comme suit :

« Supposons que $\sqrt{2}$ soit rationnel. Alors, puisque $\sqrt{2} > 0$, il existe deux entiers naturels $p, q, q \neq 0$, tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Quitte à simplifier par $p \wedge q$, nous pouvons supposer p et q premiers entre eux, la fraction $\frac{p}{q}$ est ainsi irréductible.
En élevant au carré, nous obtenons $2q^2 = p^2$. »

Les preuves présentées démarrent donc à partir de là.

2 Preuves

2.1 Par contradiction de l'irréductibilité

Nous utilisons le lemme suivant.

Proposition 2.1.1. *Un entier naturel n est pair si, et seulement si, n^2 est pair.*

Démonstration. Si n est pair, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$. Donc $n^2 = 4k^2 = 2 \times 2k^2$. Donc n^2 est pair. Le sens direct est prouvé. Si n est impair, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$. Donc $n^2 = 4k^2+4k+1 = 2 \times (2k^2+2k)+1$. Donc n^2 est impair. Par contraposée, nous venons de prouver que si n^2 est pair, alors n est pair. Le sens indirect est donc prouvé. □

Remarque : ce lemme se généralise.

Proposition 2.1.2. *Soit p un nombre premier. p divise n^2 si, et seulement si, p divise n.*

Démonstration. Trois preuves sont présentées dans le document traitant de l'exercice « si a et b sont premiers entre eux, alors $a + b$ et ab sont premiers entre eux ». □

p^2 est pair donc p est pair d'après le lemme. Donc il existe $p' \in \mathbb{N}$ tel que $p = 2p'$. En injectant, nous obtenons $q^2 = 2p'^2$. De même, q^2 est pair donc q est pair.

p et q sont donc pairs et premiers entre eux. Contradiction.

2.2 Par descente infinie de Fermat

En reprenant la preuve précédente et en posant $q = 2q'$, nous obtenons $2q'^2 = p'^2$, c'est-à-dire la même équation qu'au départ, les primes en plus. Le raisonnement peut donc être reproduit à l'infini. Or, $p' < p$ et $q' < q$, donc nous venons de trouver deux suites d'entiers naturels strictement décroissantes. Contradiction.

2.3 Par le théorème de Gauss

$2q \times q = p^2$, donc q divise $p^2 = p \times p$. Or, $p \wedge q = 1$, donc d'après le théorème de Gauss, q divise p. q est donc un diviseur positif commun à p et q. Par définition du PGCD, $0 < q \leq p \wedge q = 1$ donc $q = 1$. Donc $p^2 = 2$ avec $p \in \mathbb{N}$. Contradiction.

Cette méthode se généralise de façon évidente.

Proposition 2.3.1. *Soit n un entier naturel. $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$ si, et seulement si, n est un carré parfait.*

Démonstration. Le sens indirect est trivial. Pour le sens direct, il suffit de remplacer 2 par n dans le raisonnement ci-dessus et on obtient $p^2 = n$, donc n est un carré parfait. $\square$

2.4 Par la valuation 2-adique

Dans cette section, p, n, n_1, n_2 désignent respectivement un nombre premier et trois entiers naturels non nuls.

Définition 2.4.1. *On appelle valuation p-adique de n, et on note $v_p(n)$, la plus grande puissance de p apparaissant dans la décomposition en produit de facteurs premiers de n.*

Exemple 2.4.1. $v_3(45) = v_3(3^{\boxed{2}} \times 5) = 2, v_5(34) = v_5(2 \times 5^{\boxed{0}} \times 17) = 0$. *Par convention, puisque 1 n'admet pas de décomposition en produit de facteurs premiers, on pose $v_p(1) := 0$. Cette convention est compatible avec la propriété suivante, déduite des opérations sur les puissances.*

Proposition 2.4.1. $v_p(n_1 n_2) = v_p(n_1) + v_p(n_2)$.

Démonstration. Soient $\alpha = v_p(n_1)$ et $\beta = v_p(n_2)$. $n_1 n_2 = p^\alpha \times \dfrac{n_1}{p^\alpha} \times p^\beta \times \dfrac{n_2}{p^\beta} = p^{\alpha+\beta} \dfrac{n_1}{p^\alpha} \dfrac{n_2}{p^\beta}$, où les entiers $\dfrac{n_1}{p^\alpha}$ et $\dfrac{n_2}{p^\beta}$ ne sont pas divisibles par p par définition de la valuation. Par contraposée du lemme d'Euclide (p premier divise ab $\implies$ p divise a ou b), p ne divise donc pas $\dfrac{n_1}{p^\alpha} \dfrac{n_2}{p^\beta}$. D'où $v_p(n_1 n_2) = \alpha + \beta$. $\square$

Examinons la valuation 2-adique de chaque membre de l'équation $2q^2 = p^2$. $v_2(2q^2) = v_2(2) + 2v_2(q) = 2v_2(q) + 1$. La valuation du membre de gauche est un entier impair. $v_2(p^2) = 2v_2(p)$. La valuation du membre de droite est un entier pair. Contradiction.

2.5 Par un critère de minimalité

Pour cette preuve, nous partons simplement de l'hypothèse $\sqrt{2} = \dfrac{m_0}{n_0}$, avec m_0, n_0 entiers naturels et $n_0 \neq 0$. Nous n'élevons pas au carré et écrivons $\sqrt{2} n_0 = m_0$.

Posons $E := \{n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{2} n \in \mathbb{N}^*\}$. E est une partie non vide de $\mathbb{N}$ puisque $n_0 \in E$. Donc E admet un plus petit élément q. Notons $p := \sqrt{2} q$.

$$
\begin{aligned}
\sqrt{2} q = p &\iff 2q = \sqrt{2} p && \text{en multipliant par } \sqrt{2} \\
&\iff 2\sqrt{2} q = 2p && \text{en multipliant à nouveau par } \sqrt{2} \\
&\iff \sqrt{2}(2q - p) = 2p - \sqrt{2} p && \text{en retranchant } \sqrt{2} p \text{ puis en factorisant} \\
&\iff \sqrt{2}(2q - p) = 2(p - q) && \text{car } \sqrt{2} p = 2q
\end{aligned}
$$

Or, $\sqrt{2} > 1 \iff \dfrac{p}{q} > 1 \iff p - q > 0$, donc $\sqrt{2}(2q - p) \in \mathbb{N}^*$.

Par ailleurs, $2 > \sqrt{2} \iff 2 > \dfrac{p}{q} \iff 2q - p > 0$, d'où $2q - p \in E$.

Cependant, $p > q \iff -p < -q \iff 2q - p < q$, ce qui contredit la minimalité de q.

2.6 Par le critère d'Eisenstein

Rappelons, sans le démontrer, le critère d'Eisenstein.

Proposition 2.6.1. *Soient $P \in \mathbb{Z}[X]$ et p un nombre premier. Si p divise tous les coefficients de P sauf le coefficient dominant et que p^2 ne divise pas le terme constant de P, alors P est irréductible sur $\mathbb{Q}[X]$.*

Nous aurons également besoin du lemme classique suivant, non démontré ici.

Proposition 2.6.2. *Un polynôme de degré 2 ou 3 est irréductible sur $\mathbb{Q}[X]$ si, et seulement si, il n'admet aucune racine dans $\mathbb{Q}$.*

Considérons le polynôme $P(X) = X^2 - 2$. $P \in \mathbb{Z}[X]$. Le nombre premier 2 divise -2 mais ne divise pas le coefficient dominant 1. Et $2^2 = 4$ ne divise pas le terme constant -2. Donc d'après le critère d'Eisenstein, P est irréductible sur $\mathbb{Q}[X]$. Or, P est de degré 2, donc d'après le lemme, P n'admet aucune racine dans $\mathbb{Q}$. Or, les racines de P sont $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$. Donc $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.