Chiffre des unités de la racine treizième

Samuel Rochetin

Vendredi 13 décembre 2019

Propriété. *$\forall n \in \mathbb{N}$, le chiffre des unités de n^{13} est celui de n.*

Démonstration. Montrons que $n^{13} \equiv n \pmod{10}$.

n^{13} et n ayant même parité, on a $n^{13} - n \equiv 0 \pmod{2}$.

Si $5 \mid n$, alors on a $n^{13} - n \equiv 0 \pmod{5}$.

Sinon, d'après le petit théorème de Fermat, $n^4 \equiv 1 \pmod{5}$.

Il vient $n\left(\left(n^4\right)^3 - 1\right) \equiv 0 \pmod{5}$, c'est-à-dire $n^{13} - n \equiv 0 \pmod{5}$.

$2 \mid n^{13} - n$ et $5 \mid n^{13} - n$, avec $2 \wedge 5 = 1$, donc d'après le corollaire du théorème de Gauss, $10 \mid n^{13} - n$, c'est-à-dire $n^{13} \equiv n \pmod{10}$. $\square$

Exemple. *Montrer sans calcul que la racine treizième de* 8192 *est* 2.

Solution. L'énoncé présuppose que 8192 est une puissance treizième. D'après la propriété précédente, la racine treizième de 8192 a donc pour chiffre des unités 2. Si cette racine treizième s'écrivait avec au moins deux chiffres, alors 8192 s'écrirait avec au moins quatorze chiffres (le nombre de chiffres de 10^{13}). Absurde. Donc cette racine treizième s'écrit avec un chiffre. Donc elle vaut 2. $\square$