Racines carrées

Samuel Rochetin

Mercredi 6 juin 2018

Résumé

Le but de ce document est de définir rigoureusement la racine carrée d'un réel positif ou nul puis d'établir une propriété algébrique immédiate.

Proposition 1. *Soit x un réel positif ou nul. Il existe un unique réel positif ou nul dont le carré vaut x.*

Démonstration. Montrons l'existence.

Si $x = 0$, alors $0^2 = 0 = x$.

Supposons que $x > 0$.

Posons $E \coloneqq \{y \in \mathbb{R}, y > 0, y^2 < x\}$.

Montrons que E est non vide.

Si $0 < x < 1$, alors en multipliant l'inégalité $x < 1$ par $x > 0$, il vient $x^2 < x$ donc $x \in E$.

Si $x = 1$, alors $\dfrac{1}{2} \in A$ car $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4} < 1$.

Et si $1 < x$, alors $1 \in A$ car $1^2 = 1 < x$.

Ainsi, E est une partie non vide de $\mathbb{R}$.

Montrons que E est majorée.

Si $0 < x \leq 1$, alors E est majorée par 1.

En effet, si $\exists y \in E$ tel que $1 < y$, alors par croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$, $1^2 < y^2 \implies x < y^2$.

Contradiction.

Donc $\forall y \in E, y \leq 1$.

Si $1 < x$, alors E est majorée par x.

En effet, si $\exists y \in E$ tel que $x < y$, alors par croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$, $x^2 < y^2 \implies x^2 < x$.

Or, en multipliant l'inégalité $1 < x$ par $x > 0$, il vient $x < x^2$.

Contradiction.

Donc $\forall y \in E, y \leq x$.

Ainsi, E est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ donc E admet une borne supérieure r.

Remarquons que r dépend de x et que $r > 0$ car r majore E et $\forall y \in E, y > 0$ donc $0 < y \leq r$.

Montrons que $r^2 = x$.

Supposons que $r^2 < x$.

Montrons que $\exists n \in \mathbb{N}^*, r + \dfrac{1}{n} \in E$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Nous avons $\left(r+\frac{1}{n}\right)^2 = r^2+\frac{2r}{n}+\frac{1}{n^2} \leq r^2+\frac{1}{n}(2r+1)$ car $0 < \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n}$.

Nous avons déjà $r+\frac{1}{n} > 0$ donc pour avoir $\left(r+\frac{1}{n}\right)^2 < x$, il suffit d'avoir $r^2+\frac{1}{n}(2r+1) < x$, c'est-à-dire $2r+1 < n\left(x-r^2\right)$.

Or, $2r+1 \in \mathbb{R}$ et par hypothèse, $x-r^2 > 0$ donc un tel $n \in \mathbb{N}^*$ existe car $\mathbb{R}$ est archimédien.

Ainsi, $\exists n \in \mathbb{N}^*$ tel que $r+\frac{1}{n} \in E$.

Or, r majore E donc $r+\frac{1}{n} \leq r$.

Contraction car $r < r+\frac{1}{n}$.

Donc $x \leq r^2$.

Supposons que $x < r^2$.

Montrons que $\exists m \in \mathbb{N}^*, r-\frac{1}{m} > 0, \left(r-\frac{1}{m}\right)^2 > x$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

D'une part, $1 \in \mathbb{R}$ et $r > 0$ donc $\exists m_1 \in \mathbb{N}^*, m_1 r > 1$ car $\mathbb{R}$ est archimédien.

D'autre part, soit $m_2 \in \mathbb{N}^*$.

Nous avons $\left(r-\frac{1}{m_2}\right)^2 = r^2-\frac{2r}{m_2}+\frac{1}{m_2^2} > r^2-\frac{2r}{m_2}$ car $\frac{1}{m_2^2} > 0$.

Pour avoir $\left(r-\frac{1}{m_2}\right)^2 > x$, il suffit d'avoir $r^2-\frac{2r}{m_2} > x$, c'est-à-dire $m_2(r^2-x) > 2r$. Or, $2r \in \mathbb{R}$ et par hypothèse, $r^2-x > 0$ donc un tel $m_2 \in \mathbb{N}^*$ existe car $\mathbb{R}$ est archimédien.

Ainsi, en posant $m := \max(m_1, m_2)$ nous avons bien $\exists m \in \mathbb{N}^*, r-\frac{1}{m} > 0, \left(r-\frac{1}{m}\right)^2 > x$.

Montrons que $r-\frac{1}{m}$ est un majorant de E.

Si $\exists y \in E, 0 < r-\frac{1}{m} < y$, alors par croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$, $\left(r-\frac{1}{m}\right)^2 < y^2 \implies \left(r-\frac{1}{m}\right)^2 < x$.

Contradiction.

Donc $\forall y \in E, y \leq r-\frac{1}{m}$.

Or, r est le plus petit minorant de E donc $r \leq r-\frac{1}{m}$.

Contradiction car $r-\frac{1}{m} < r$.

Donc $r^2 \leq x$.

Ainsi, $x \leq r^2$ et $r^2 \leq x$ donc $r^2 = x$.

Montrons l'unicité.

Supposons que $x = 0$.

D'après ci-dessus, il existe un réel positif ou nul r tel que $r^2 = x$.

$$\begin{aligned}
& r^2 = x \\
\iff & r^2 = 0 \\
\iff & r \times r = 0 \\
\iff & r = 0 && \text{équation produit nul}
\end{aligned}$$

Supposons que $x > 0$.

Supposons qu'il existe deux réels positifs ou nuls r_1, r_2 tels que $r_1^2 = x$ et $r_2^2 = x$.

Ainsi, $r_1^2 = r_2^2$.

Or, $x \neq 0$ donc $r_1 \neq 0$ et $r_2 \neq 0$ donc $r_1 > 0$ et $r_2 > 0$.

$$\begin{aligned}
& r_1^2 = r_2^2 \\
\iff & r_1^2 - r_2^2 = 0 \\
\iff & (r_1 - r_2)(r_1 + r_2) = 0 && \text{identité remarquable} \\
\iff & r_1 - r_2 = 0 \text{ ou } r_1 + r_2 = 0 && \text{équation produit nul} \\
\iff & r_1 = r_2 \text{ ou } r_1 = -r_2
\end{aligned}$$

Si $r_1 = -r_2$, alors $r_1 < 0$.

Contradiction.

Donc $r_1 = r_2$. □

Définition 1. *Soit x un réel positif ou nul. On appelle **racine carrée** de x et on note $\sqrt{x}$ l'unique réel positif ou nul tel que*

$$\boxed{(\sqrt{x})^2 = x.}$$

Propriété 1. *Soient x, y deux réels positifs ou nuls.*

$$\boxed{\sqrt{x \times y} = \sqrt{x} \times \sqrt{y}}$$

Démonstration. D'après la définition 1, $(\sqrt{x \times y})^2 = x \times y$. Or, par associativité et commutativité et d'après la définition 1, $(\sqrt{x} \times \sqrt{y})^2 = (\sqrt{x} \times \sqrt{y}) \times (\sqrt{x} \times \sqrt{y}) = (\sqrt{x} \times \sqrt{x}) \times (\sqrt{y} \times \sqrt{y}) = x \times y$. Ainsi, $(\sqrt{x \times y})^2 = (\sqrt{x} \times \sqrt{y})^2$. □