Théorèmes du rang et de la base incomplète

Samuel Rochetin

Mardi 17 décembre 2019

Exercice. *Soit* $f \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^6\right), \operatorname{rg}\left(f^2\right) = 3$. *Caractériser* f *et donner des exemples.*

Solution. $\operatorname{im}\left(f^2\right) \subset \operatorname{im} f \implies \operatorname{rg}\left(f^2\right) \leq \operatorname{rg} f \iff 3 \leq \operatorname{rg} f$.

Supposons que $\operatorname{rg} f = 6$.

D'après le théorème du rang, $\operatorname{rg} f + \dim\ker f = 6 \iff \dim\ker f = 0$.

En dimension finie, nous avons donc f bijective donc f^2 bijective comme composée d'applications bijectives donc $\operatorname{rg}\left(f^2\right) = 6$.

Contradiction.

Donc $\operatorname{rg} f < 6$.

Supposons que $\operatorname{rg} f = 5$.

Le théorème du rang donne $\dim\ker f = 1$ donc $\exists u \in \left(\mathbb{R}^6\right)^*, \ker f = \operatorname{vect}(u)$.

Le théorème du rang donne $\dim\ker\left(f^2\right) = 3$.

Or, $\ker f \subset \ker\left(f^2\right)$ donc en notant $\mathcal{B}$ une base de $\ker\left(f^2\right)$, d'après le théorème de la base incomplète, $\exists(v, w) \subset \mathcal{B}, \ker\left(f^2\right) = \operatorname{vect}(u, v, w)$.

$f(v) \in \ker f \implies \exists\alpha \in \mathbb{R}, f(v) = \alpha u$.

Si $\alpha = 0$, alors $v \in \ker f$ donc u, v colinéaires donc (u, v, w) liée.

Contradiction.

Donc $\alpha \neq 0$.

De même, $\exists\beta \in \mathbb{R}^*, f(w) = \beta u$.

Donc par division, soustraction et linéarité, $f\left(\dfrac{v}{\alpha} - \dfrac{w}{\beta}\right) = 0$.

Donc $\dfrac{v}{\alpha} - \dfrac{w}{\beta} \in \ker f$.

Donc $\exists\gamma \in \mathbb{R}, \dfrac{v}{\alpha} - \dfrac{w}{\beta} = \gamma u$.

Or, $\dfrac{1}{\alpha} \neq 0$ donc la famille (u, v, w) est liée.

Contradiction.

Donc $\operatorname{rg} f < 5$.

Au final, $3 \leq \operatorname{rg} f \leq 4$.

Existe-t-il une telle application de rang 3 ?

Oui, il suffit de considérer l'application f dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^6$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Cette matrice est clairement de rang 3. Elle est égale à son carré donc son carré est aussi de rang 3. Il en va de même pour f et f^2.

Existe-t-il une telle application de rang 4 ?

Oui, il suffit de considérer l'application f dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^6$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Cette matrice est clairement de rang 4. Son carré est la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, qui est clairement de rang 3. Il en va de même pour f et f^2. $\square$