Récurrence forte

Samuel Rochetin

Dimanche 12 juin 2016

Résumé

Ce problème fut posé aux olympiades suédoises de mathématiques en 1967. Il peut être proposé aux bons élèves de Terminale S.

Énoncé. $(u_n)_{n\geq 1}$ *est une suite réelle vérifiant :*

— *pour tout* $n \geq 1, u_n > 0$

— *pour tout* $n \geq 3, u_n^2 \geq u_{n-1} + u_{n-2} + \cdots + u_1$

Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ *telle que* $\forall n \geq 1, u_n \geq Cn$.

Démonstration. Cas particuliers : la deuxième condition ne s'appliquant qu'à partir du rang $n = 3$, nous devons examiner les cas $n = 1$ et $n = 2$ séparément. Si $n = 1, u_1 \geq u_1 \times 1$ donc $C = u_1$ convient. Si $n = 2, u_2 \geq \frac{u_2}{2} \times 2$ donc $C = \frac{u_2}{2}$ convient.

Montrons par récurrence forte sur n que $C = \min\left(u_1, \frac{u_2}{2}, \frac{1}{3}\right)$ est une constante qui convient.

Initialisation : $u_1 = u_1 \times 1 \geq C \times 1$ par définition de C. Donc la propriété est vraie au rang $n = 1$.

Hérédité : supposons qu'il existe $n \geq 2$ tel que $\forall k \in [\![1; n]\!], u_k \geq Ck$.

$$\begin{aligned}
& u_{n+1}^2 \geq u_n + u_{n-1} + \cdots + u_2 + u_1 \\
\Longrightarrow\ & u_{n+1}^2 \geq Cn + C(n-1) + \cdots + C && \text{par hypothèse de récurrence} \\
\Longleftrightarrow\ & u_{n+1}^2 \geq C(n + n - 1 + \cdots + 2 + 1) \\
\Longleftrightarrow\ & u_{n+1}^2 \geq C\frac{n(n+1)}{2} \\
\Longleftrightarrow\ & u_{n+1} \geq \sqrt{C\frac{n(n+1)}{2}} && \text{car } C\frac{n(n+1)}{2} \geq 0
\end{aligned}$$

Pour obtenir $u_{n+1} \geq C(n+1)$, il suffit de vérifier que $\sqrt{C\frac{n(n+1)}{2}} \geq C(n+1)$. Or, $C(n+1) \geq 0$, donc $\sqrt{C\frac{n(n+1)}{2}} \geq C(n+1) \iff$

$C\left(-(n+1)C+\frac{n}{2}\right) \geq 0 \iff C \in \left[0; \frac{n}{2(n+1)}\right]$. Il suffit donc de vérifier que $C \in \left[0; \frac{n}{2(n+1)}\right]$, pour $n \geq 2$ fixé. Or, la fonction $x \mapsto \frac{x}{2(x+1)}$ est croissante sur $[2; +\infty[$, donc $\frac{n}{2(n+1)} \geq \frac{2}{2(2+1)} = \frac{1}{3} \geq C > 0$ par définition de C. $\square$

Remarque : le théorème de comparaison des limites permet d'en déduire que $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.