$x + \dfrac{1}{x}$, irrationnels

Samuel Rochetin

Mercredi 27 février 2019

Exercice.

1. *Montrer que* $\exists x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, x + \dfrac{1}{x} \in \mathbb{Z}$.
2. *Soit* $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, x + \dfrac{1}{x} \in \mathbb{Z}$. *Montrer que* $\forall n \in \mathbb{N}, x^n + \dfrac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$.

Solution.

1. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Supposons que $\exists x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, x + \dfrac{1}{x} = k$.

   Cette équation équivaut à $x^2 - kx + 1 = 0$. C'est une équation du second degré en x. Elle admet donc au moins une solution si et seulement si son discriminant est positif ou nul, c'est-à-dire si et seulement si $k^2 - 4 \geq 0$, si et seulement si k est un entier relatif différent de $-1, 0, 1$.

   Si $k = 3$, alors on vérifie que $x = \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}$ répond à la question.

2. Montrons le résultat par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$.

   Le cas $n = 0$ est trivial. Le cas $n = 1$ est l'hypothèse de la question, possible d'après la question précédente.

   Supposons que $\exists n \in \mathbb{N}, x^n + \dfrac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$ et $x^{n+1} + \dfrac{1}{x^{n+1}} \in \mathbb{Z}$.

   Alors $x^{n+2} + \dfrac{1}{x^{n+2}} = \left(x + \dfrac{1}{x}\right) \times \left(x^{n+1} + \dfrac{1}{x^{n+1}}\right) - \left(x^n + \dfrac{1}{x^n}\right) \in \mathbb{Z}$ comme somme et produit d'entiers relatifs.

$\square$