Résolution numérique

Samuel Rochetin

Jeudi 29 novembre 2018

Exercice. *Montrer que l'équation* $x = \ln(2x+1)$ *admet une solution non triviale et proposer une méthode de résolution approchée en étudiant la convergence.*

Solution. On ne peut pas appliquer le théorème du point fixe de Picard à la fonction $f : x \mapsto \ln(2x+1)$.

En effet, l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$ est certes complet et stable par f mais f n'y est que 1-lipschitzienne donc n'est pas contractante.

L'étude de la fonction $x \mapsto \ln(2x+1) - x$ et le théorème des valeurs intermédiaires permettent d'obtenir l'existence d'une unique solution α non triviale, appartenant à $\left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$.

Posons $u_0 > \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \coloneqq \ln(2u_n + 1)$.

On montre par récurrence que cette suite est bien définie.

De manière classique, selon la position de u_0 par rapport à α, on a une suite croissante ou décroissante et convergeant dans tous les cas vers α.

Soit un réel $r \geq 1$.

En utilisant $\alpha = \ln(2\alpha + 1)$, il vient, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{|u_{n+1} - \alpha|}{|u_n - \alpha|^r} = \frac{2}{2\alpha + 1} \times \left| \frac{\ln\left(1 + \frac{2}{2\alpha+1}(u_n - \alpha)\right)}{\frac{2}{2\alpha+1}(u_n - \alpha)} \right| \times \frac{1}{|u_n - \alpha|^{r-1}}.$$

Si $r = 1$, alors ce rapport tend vers $\frac{2}{2\alpha + 1} \in]0; 1[$.

Si $r > 1$, alors ce rapport n'est pas majoré à cause du dernier facteur.

On a donc une convergence linéaire à la vitesse de convergence $\frac{2}{2\alpha + 1}$.

L'inégalité $\forall x \geq 0, \ln(1 + x) \leq x$ et $r = 1$ donnent, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{2\alpha + 1} |u_n - \alpha|.$$

D'où :

$$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{2\alpha + 1}\right)^n |u_0 - \alpha|.$$

□