Fonctions sinusoïdales non proportionnelles

Samuel Rochetin

Dimanche 28 janvier 2018

Résumé

Le but de cet exercice est de montrer que deux fonctions sinusoïdales de pulsations différentes ne sont pas proportionnelles. Ce résultat se généralise à plus de deux fonctions et la méthode habituelle repose sur la dérivation et des différences astucieuses de sommes. La méthode élémentaire présentée ici ne semble pas se généraliser mais a le mérite pédagogique d'entraîner l'esprit sur des techniques simples et classiques : quantificateurs, prise d'initiatives, disjonction de cas, particularisation, raisonnement par l'absurde.

Exercice. *Soit* $(\omega_1, \omega_2, \varphi_1, \varphi_2) \in \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}^2, \omega_1 \neq \omega_2$. *Montrer que la famille* $(t \mapsto \cos(\omega_1 t + \varphi_1), t \mapsto \cos(\omega_2 t + \varphi_2))$ *est libre dans* $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Solution. Posons $f_1 : t \mapsto \cos(\omega_1 t + \varphi_1), f_2 : t \mapsto \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2, \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = 0$, où 0 est la fonction identiquement nulle. Autrement dit, $\forall t \in \mathbb{R}, \lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t) = 0$.

$\omega_1 \neq \omega_2$ donc au moins l'une des deux pulsations est non nulle. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer $\omega_1 \neq 0$.

<u>1^er^ cas :</u> supposons $\omega_2 = 0$. Si $\lambda_1 \neq 0$, alors $\forall t \in \mathbb{R}, f_1(t) = -\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} \cos(\varphi_2)$ donc f_1 est constante, ce qui est absurde. Donc $\lambda_1 = 0$ et puisque f_2 n'est pas la fonction identiquement nulle, $\lambda_2 = 0$.

<u>2^e^ cas :</u> supposons $\omega_2 \neq 0$. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $\omega_2 < \omega_1$.

En particularisant la relation de liaison en $t_1 := \dfrac{\frac{\pi}{2} - \varphi_1}{\omega_1}$, il vient $\lambda_2 \cos(\omega_2 t_1 + \varphi_2) = 0$.

En particularisant la relation de liaison en $t_2 := \dfrac{-\frac{\pi}{2} - \varphi_1}{\omega_1}$, il vient $\lambda_2 \cos(\omega_2 t_2 + \varphi_2) = 0$.

<u>1^er^ sous-cas :</u> si $\lambda_2 = 0$, alors puisque f_1 n'est pas la fonction identiquement nulle, $\lambda_1 = 0$.

<u>2^e^ sous-cas :</u> si $\lambda_2 \neq 0$, alors $\cos(\omega_2 t_1 + \varphi_2) = 0$ et $\cos(\omega_2 t_2 + \varphi_2) = 0$. Donc $\omega_2 t_1 + \varphi_2$ et $\omega_2 t_2 + \varphi_2$ diffèrent d'un multiple de π. Or, $\omega_2 t_1 + \varphi_2 - (\omega_2 t_2 + \varphi_2) = \dfrac{\omega_2}{\omega_1}\pi$, avec, par hypothèse, $0 < \dfrac{\omega_2}{\omega_1} < 1$. Contradiction. Donc $\lambda_2 = 0$ et nous sommes ramenés au sous-cas précédent.

Dans tous les cas, nous obtenons $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. $\square$