Autour de la somme des diviseurs

SamFaitDesMaths

Vendredi 3 février 2017

Résumé

Équivalent de $\sum_{k=1}^{n} \sigma(k)$, où $\sigma(k)$ désigne la somme des diviseurs positifs de $k \in \mathbb{N}^*$.

Première étape : reconnaître une somme de Riemann

Nous avons $\sum_{k=1}^{n} \sigma(k) = \sum_{k=1}^{n} k \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor = n^2 \times \frac{1-0}{n} \sum_{k=1}^{n} k \times \frac{1-0}{n} \left\lfloor \frac{1}{k \times \frac{1-0}{n}} \right\rfloor = n^2 \times \frac{1-0}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(0 + k \times \frac{1-0}{n}\right)$, en posant $f :]0;1] \to \mathbb{R}_+, t \mapsto t \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor$. Nous reconnaissons une somme de Riemann (à droite) de f.

Deuxième étape : prouver la convergence de la somme de Riemann

Il suffit de montrer que f est Riemann-intégrable sur $[0;1]$ pour obtenir la convergence de la somme de Riemann.

Limite en 0^+ et définition de $f(0)$

Soit $t \in]0;1[$. Nous avons $\frac{1}{t} > 1$ donc il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $p \leq \frac{1}{t} < p+1$. Nous obtenons d'une part $\frac{1}{t} - 1 < p$ et $\frac{1}{\frac{1}{t}+1} \leq \frac{1}{p+1}$ donc $\frac{1-t}{1+t} \leq \frac{p}{p+1}$. Nous obtenons d'autre part $\frac{p}{p+1} < tp \leq 1$. Or, $p = \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor$, donc $\frac{1-t}{1+t} \leq f(t) \leq 1$. Le théorème des gendarmes donne $\lim_{t \to 0^+} f(t) = 1$. Nous posons naturellement $f(0) := 1$.

Riemann-intégrabilité de f sur $[0;1]$

La définition de la limite donne : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $t \in]0;\eta[\implies 1 - \frac{\varepsilon}{4} \leq f(t) \leq 1 + \frac{\varepsilon}{4}$. Or, par définition, $f(0) = 1$. Donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $t \in [0;\eta[\implies 1 - \frac{\varepsilon}{4} \leq f(t) \leq 1 + \frac{\varepsilon}{4}$. Puisque $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe $p_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{p_0+1} < \eta$. Donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $p_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $t \in \left[0; \frac{1}{p_0+1}\right] \implies 1 - \frac{\varepsilon}{4} \leq f(t) \leq 1 + \frac{\varepsilon}{4}$. Posons les deux fonctions en escalier $f_1(t) := 1 - \frac{\varepsilon}{4}$ et $f_2(t) := 1 + \frac{\varepsilon}{4}$ définies sur $\left[0; \frac{1}{p_0+1}\right]$. Nous avons donc sur cet intervalle $f_1 \leq f \leq f_2$ et $\int_0^{\frac{1}{p_0+1}} f_2 - \int_0^{\frac{1}{p_0+1}} f_1 = \frac{\varepsilon}{2(p_0+1)} < \frac{\varepsilon}{2}$.

D'autre part, sur tout intervalle $\left]\frac{1}{p+1}; \frac{1}{p}\right]$, où $p \in [\![1;p_0]\!]$, nous avons $f(t) = tp$ donc f est continue sur $\left]\frac{1}{p+1}; \frac{1}{p}\right]$ et prolongeable par continuité en $\frac{1}{p+1}^+$. Donc f est continue par morceaux sur $\left[\frac{1}{p_0+1}; 1\right]$. Donc f est Riemann-intégrable sur $\left[\frac{1}{p_0+1}; 1\right]$. Donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions en escalier g_1, g_2 définies sur $\left[\frac{1}{p_0+1}; 1\right]$ telles que $g_1 \leq f \leq g_2$ sur cet intervalle et $\int_{\frac{1}{p_0+1}}^1 g_2 - \int_{\frac{1}{p_0+1}}^1 g_1 < \frac{\varepsilon}{2}$.

Au final, en posant $\varphi_1 := \begin{cases} f_1 & \text{sur } \left[0; \frac{1}{p_0+1}\right] \\ g_1 & \text{sur } \left]\frac{1}{p_0+1}; 1\right] \end{cases}$ et $\varphi_2 := \begin{cases} f_2 & \text{sur } \left[0; \frac{1}{p_0+1}\right] \\ g_2 & \text{sur } \left]\frac{1}{p_0+1}; 1\right] \end{cases}$, nous avons : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions en escaliers φ_1, φ_2 telles que $\varphi_1 \leq f \leq \varphi_2$ sur $[0;1]$ et $\int_0^1 \varphi_2 - \int_0^1 \varphi_1 < \varepsilon$. Donc f est Riemann-intégrable sur $[0;1]$.

Limite de la somme de Riemann

Nous avons donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} \sigma(k)}{n^2} = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

Troisième étape : calcul de la limite et obtention de l'équivalent

D'après ce qui a été fait précédemment, $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \lim\limits_{p\to+\infty} \int_{\frac{1}{p+1}}^1 f(t)\,\mathrm{d}t$. Or, $\int_{\frac{1}{p+1}}^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \sum\limits_{i=1}^{p} \int_{\frac{1}{i+1}}^{\frac{1}{i}} ti\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{p} \dfrac{1}{i} - \dfrac{i}{(i+1)^2} = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{p} \dfrac{1}{i} - \dfrac{1}{i+1} + \dfrac{1}{(i+1)^2} = \dfrac{1}{2}\left(\sum\limits_{i=1}^{p} \dfrac{1}{i^2} - \dfrac{1}{p+1}\right)$. Donc $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{\pi^2}{12}$. Au final, $\boxed{\sum\limits_{k=1}^{n} \sigma(k) \sim \dfrac{\pi^2}{12} n^2.}$

Mise en pratique

Calculons $\sum\limits_{k=1}^{2017} \sigma(k)$ à l'aide de Scilab.

$s = 0$;
for $k = 1 : 2017$ do
$s = s + k{*}\text{floor}(2017/k)$;
end ;
disp(s)

Scilab renvoie : $\sum\limits_{k=1}^{2017} \sigma(k) = 3347279$.

L'équivalent permet d'écrire $\sum\limits_{k=1}^{2017} \sigma(k) \simeq 3346033,5849\ldots$