Khôlle d'analyse

Samuel Rochetin

Jeudi 19 avril 2018

Exercice. *Montrer que tout sous-groupe de* $(\mathbb{R},+)$ *est dense dans* $\mathbb{R}$ *ou de la forme* $a\mathbb{Z}, a \in \mathbb{R}^*$.

Solution. Le sous-groupe trivial est bien de la forme $a\mathbb{Z}$, avec $a = 0$.

Soit $(G,+)$ un sous-groupe non trivial. G contient alors un réel $x \neq 0$. Quitte à considérer son inverse $-x$, nous pouvons supposer $x > 0$. Ainsi, $G \cap \mathbb{R}_+^*$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$, puisqu'elle contient au moins x, et minorée par 0. Donc $G \cap \mathbb{R}_+^*$ admet une borne inférieure notée a.

Naturellement, nous voulons déterminer si $a \in G$. Supposons que $a \notin G$. D'après la caractérisation de la borne inférieure, $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in G \cap \mathbb{R}_+^*, a < x < a + \varepsilon$. De même, $\exists y \in G \cap \mathbb{R}_+^*, a < y < x$. Nous avons $a < x < y < a + \varepsilon$ et il vient aisément $0 < y - x < \varepsilon$. En particulier, pour $\varepsilon = \dfrac{a}{2}$, nous avons $0 < y - x < \dfrac{a}{2}$. Or, G est un groupe contenant x et y donc $y - x \in G$. D'autre part, $0 < y - x$ donc $y - x \in \mathbb{R}_+^*$. Au final, $y - x \in G \cap \mathbb{R}_+^*$ donc $a < y - x$. Contradiction. Donc $a \in G$.

1^er cas : si $a \neq 0$. Soit $x \in G$. Posons $n \coloneqq \left\lfloor \dfrac{x}{a} \right\rfloor$. Par définition de la partie entière, $n \leq \dfrac{x}{a} < n + 1 \iff 0 \leq x - an < a$. Or, $n \in \mathbb{Z}$ et G est un groupe contenant x et a donc $x - an \in G$. Si $0 < x - an$, alors $x - an \in G \cap \mathbb{R}_+^*$ donc $a < x - an$. Contradiction. Donc $0 = x - an \iff x = an$. Donc $G \subset a\mathbb{Z}$. Réciproquement, G est un groupe contenant a donc $a\mathbb{Z} \subset G$. Donc $\boxed{G = a\mathbb{Z}.}$

2^e cas : si $a = 0$. Montrons que G est dense dans $\mathbb{R}$. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2, x < y$. Nous voulons exhiber un élément $g \in G$ tel que $x < g < y$. Nous avons $0 < y - x$ donc par caractérisation de la borne inférieure, $\exists z \in G \cap \mathbb{R}_+^*, 0 < z < y - x$. Posons $m \coloneqq \left\lfloor \dfrac{x}{z} \right\rfloor$. Par définition de la partie entière, $m \leq \dfrac{x}{z} < m+1 \iff zm \leq x < zm+z$. En utilisant $zm \leq x$ et $z < y-x$, il vient $zm+z < x+y-x = y$. Donc $x < zm + z < y$. Or, $m \in \mathbb{Z}$ et G est un groupe contenant z donc $zm + z \in G$. Donc $g = zm + z$ convient et $\boxed{G \text{ est dense dans } \mathbb{R}.}$ $\square$