Croissance de $x \mapsto \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$

Samuel Rochetin

Mercredi 27 février 2019

Exercice. *Montrer que* $x \mapsto \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ *est croissante sur* $]0;+\infty[$.

Solution. Soit f la fonction considérée.

Par définition d'une puissance réelle, $\forall x \in]0;+\infty[, f(x) = \mathrm{e}^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$.

Posons, $\forall x \in]0;+\infty[, g(x) \coloneqq x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$.

Il vient aisément $g'(x) = \ln(x+1) - \ln x - \dfrac{1}{x+1}$.

Quel que soit $x \in]0;+\infty[$, la fonction logarithme népérien est continue sur $[x, x+1]$ et dérivable sur $]x, x+1[$ donc d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c_x \in]x, x+1[$ tel que $\ln(x+1) - \ln x = \dfrac{1}{c_x}$.

Donc $\forall x \in]0;+\infty[, g'(x) = \dfrac{1}{c_x} - \dfrac{1}{x+1}$.

Ainsi :

$$\begin{aligned} &\forall x \in]0;+\infty[, c_x < x+1 \\ \iff &\frac{1}{x+1} < \frac{1}{c_x} \\ \iff &0 < \frac{1}{c_x} - \frac{1}{x+1} \\ \iff &g'(x) > 0 \end{aligned}$$

Donc g est croissante. Donc $f = \exp \circ g$ est croissante comme composée de fonctions croissantes. $\square$