Khôlle d'analyse

Samuel Rochetin

Samedi 17 février 2018

Exercice. *Soit f une fonction deux fois dérivable sur $[0;1]$ telle que $f(0) = f'(0) = f'(1) = 0$ et $f(1) = 1$. Montrer qu'il existe $c \in]0;1[$ tel que $|f''(c)| \geq 4$.*

Solution. La formule de Taylor-Lagrange appliquée en $a = 0$ et $b = \frac{1}{2}$ donne l'existence de $c_1 \in \left]0; \frac{1}{2}\right[$ tel que $f\left(\frac{1}{2}\right) = f(0) + f'(0)\left(\frac{1}{2} - 0\right) + \dfrac{f''(c_1)}{2!}\left(\frac{1}{2} - 0\right)^2 = \dfrac{f''(c_1)}{8}$.

La formule de Taylor-Lagrange appliquée en $a = 1$ et $b = \frac{1}{2}$ donne l'existence de $c_2 \in \left]\frac{1}{2}; 1\right[$ tel que $f\left(\frac{1}{2}\right) = f(1) + f'(1)\left(\frac{1}{2} - 1\right) + \dfrac{f''(c_2)}{2!}\left(\frac{1}{2} - 1\right)^2 = 1 + \dfrac{f''(c_2)}{8}$.

Il vient $\dfrac{f''(c_1)}{8} = 1 + \dfrac{f''(c_2)}{8} \implies 8 = |f''(c_1) - f''(c_2)| \leq |f''(c_1)| + |f''(c_2)| \leq 2\max(|f''(c_1)|, |f''(c_2)|) \implies \max(|f''(c_1)|, |f''(c_2)|) \geq 4$. Nous avons appliqué l'inégalité triangulaire puis divisé par 2.

Donc $\boxed{c = c_1 \text{ ou } c = c_2.}$ $\square$