Khôlle d'analyse

Samuel Rochetin

Mardi 20 mars 2018

Exercice. *Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, majorée, telle que $f'' \geq 0$. Montrer que f est constante.*

Solution. Supposons que f ne soit pas constante. Alors $\exists x_0 \in \mathbb{R}, f'(x_0) \neq 0$.

Supposons que $f'(x_0) > 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

La formule de Taylor-Lagrange appliquée en $a = x_0$ et $b = x$ donne l'existence de c strictement compris entre x_0 et x tel que $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2$.

Par hypothèse, $f''(c) \geq 0$ donc $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Par comparaison, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ donc f n'est pas majorée.

Contradiction.

Si nous supposons $f'(x_0) < 0$, il vient de même $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$. $\square$