Théorème de Thalès

Samuel Rochetin

Dimanche 15 décembre 2019

Résumé

La démonstration écrite la plus ancienne connue de ce théorème est donnée par EUCLIDE. C'est celle que nous proposons ici.

Théorème. *Soient ABC un triangle et M, N deux points tels que $M \in [AB], N \in [AC], (MN) \parallel (BC)$.*

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

Démonstration. Les triangles BCN et BCM ont la base $[BC]$ en commun et leurs hauteurs respectives relativement à cette base ont même longueur donc $\mathscr{A}_{BCN} = \mathscr{A}_{BCM}$.

Les aires complémentaires à $\mathscr{A}_{ABC}$ sont donc égales : $\mathscr{A}_{ABN} = \mathscr{A}_{ACM}$.

Donc $\frac{\mathscr{A}_{AMN}}{\mathscr{A}_{ABN}} = \frac{\mathscr{A}_{AMN}}{\mathscr{A}_{ACM}}$.

Or, dans les triangles AMN et ABN, la hauteur issue de N est identique donc $\frac{\mathscr{A}_{AMN}}{\mathscr{A}_{ABN}} = \frac{AM}{AB}$.

On obtient de même $\frac{\mathscr{A}_{AMN}}{\mathscr{A}_{ACM}} = \frac{AN}{AC}$.

D'où $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$.

La parallèle à (AC) passant par M coupe $[BC]$ en I.

En appliquant le résultat précédent aux triangles BMI et BAC, on a $\frac{BM}{BA} = \frac{BI}{BC}$.

Or, $MNCI$ est un parallélogramme donc $IC = MN$.

Les alignements de points donnent donc $\frac{AB - AM}{AB} = \frac{BC - MN}{BC}$, d'où $\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}$. □