

# Autour du théorème des nombres premiers

Samuel Rochetin

Lundi 29 janvier 2018

**Exercice.** Soit  $p_n$  l' $n$ ième nombre premier. Montrer que  $n \geq 2 \implies p_n < n^2$ .

*Solution.* Remarquons tout d'abord que  $p_1 = 2 \geq 1 = 1^2$ .

L'implication est vérifiée  $\forall n \in \llbracket 2; 5 \rrbracket$ .

Eric BACH et Jeffrey SHALLIT ont publié en 1996 la majoration  $\forall n \geq 6, p_n < n \ln n + n \ln \ln n$ . Il suffit donc de déterminer s'il existe des entiers  $n$  tels que  $n \ln n + n \ln \ln n \leq n^2$ . Or,  $n > 0$  et la fonction exponentielle est croissante donc cette inégalité est équivalente à  $n \ln n \leq \exp n$ . Une simple étude de fonction permet de montrer que cette inégalité est bien vérifiée pour tout entier naturel  $n \geq 6$ .  $\square$