Topologie de la droite réelle

Samuel Rochetin

Samedi 18 janvier 2020

Exercice. *Soit* $\mathbb{R}$ *muni de la topologie usuelle. Montrer que* $\mathbb{Q}$ *n'est ni ouvert, ni fermé.*

Solution. Les ouverts de la topologie usuelle de $\mathbb{R}$ sont $\emptyset, \mathbb{R}$ et les réunions d'intervalles de la forme $]a, b[$, avec a, b deux réels distincts tels que $a < b$.

Supposons que $\mathbb{Q}$ soit ouvert.

$\mathbb{Q} \neq \emptyset, \mathbb{Q} \neq \mathbb{R}$ donc $\mathbb{Q}$ est une réunion d'intervalles de la forme $]a, b[$, avec a, b deux réels distincts tels que $a < b$.

Donc par densité de l'ensemble des irrationnels dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ contient au moins un irrationnel.

Contradiction.

Donc $\mathbb{Q}$ n'est pas ouvert.

Supposons que $\mathbb{Q}$ soit fermé.

Alors $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}$.

Or, par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Donc $\mathbb{Q} = \mathbb{R}$.

Contradiction.

Donc $\mathbb{Q}$ n'est pas fermé. □