Continuité uniforme

Samuel Rochetin

Jeudi 20 octobre 2016

Résumé

Le but de ce document est de présenter la notion de continuité uniforme à l'aide d'exemples classiques, dans le cadre des fonctions réelles d'une variable réelle. Ainsi, I désignera un intervalle réel et f une fonction définie sur I à valeurs réelles.

1 Définition

Définition 1. *On dit que f est uniformément continue sur I si $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x,y) \in I^2, |x-y| \leq \eta \implies |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$.*

Remarque 1. *f uniformément continue sur $I \implies f$ continue sur I. C'est immédiat mais la réciproque est fausse, comme le montre l'exemple 4. La continuité uniforme est une notion plus forte que la continuité puisque la fonction a la même régularité partout : ε ne dépend pas du couple (x,y).*

Remarque 2 (Interprétation graphique)**.** *Autrement dit, pour ε fixé, on peut trouver η tel qu'en avançant au plus de η en abscisses, la fonction monte ou descend au plus de ε en ordonnées, et ce partout sur la courbe. La courbe ne peut donc pas être trop abrupte.*

2 Exemples

Exemple 1. *$x \mapsto \sin x$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$.

$$\begin{aligned}\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, |\sin x - \sin y| &= 2\left|\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\right| \\ &\leq 2\left|\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\right| \\ &\leq |x-y|\end{aligned}$$

Nous avons utilisé une formule de trigonométrie (transformation de somme en produit) et les majorations $\forall t \in \mathbb{R}, |\cos t| \leq 1$ puis $\forall t \in \mathbb{R}, |\sin t| \leq |t|$.

Posons $\eta := \varepsilon$. Ainsi :

$$\begin{aligned}\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, |x-y| \leq \eta \implies |\sin x - \sin y| &\leq |x-y| \\ &\leq \eta \\ &= \varepsilon\end{aligned}$$

$\square$

Exemple 2. *$x \mapsto \sin\sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[1;+\infty[$.*

Démonstration. La majoration de l'exemple 1, l'utilisation de la quantité conjuguée, la croissance de la fonction carré et le fait que l'intervalle soit minoré par 1 donnent :

$$\begin{aligned}\forall(x,y)\in[1;+\infty[^2, \left|\sin\sqrt{x}-\sin\sqrt{y}\right| &\leq \left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right| \\ &= \frac{|x-y|}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \\ &\leq \frac{|x-y|}{2}\end{aligned}$$

Il suffit de poser $\eta \coloneqq 2\varepsilon$ pour conclure. $\square$

Exemple 3. *$x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.*

Démonstration. Le quotient $\dfrac{|x-y|}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ n'est pas défini en $(0;0)$ donc la méthode de l'exemple 2 ne s'applique pas. Cependant, une autre identité remarquable donne $\forall(x,y)\in(\mathbb{R}_+)^2, \left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2 = x+y-2\sqrt{xy}$. Supposons que $x \leq y$. Il vient :

$$\begin{aligned}&\sqrt{x}\leq\sqrt{y} \\ \iff\ & x \leq \sqrt{xy} \\ \iff\ & -2\sqrt{xy} \leq -2x \\ \iff\ & \left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2 \leq y-x \\ \iff\ & \left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2 \leq |x-y|\end{aligned}$$

Or, les expressions $\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2$ et $|x-y|$ sont invariantes si on échange x et y donc cette dernière inégalité est vraie pour tout $(x,y)\in(\mathbb{R}_+)^2$. Enfin, $\forall t\in\mathbb{R}, \sqrt{t^2}=|t|$ donc $\forall(x,y)\in(\mathbb{R}_+)^2, \left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right| \leq \sqrt{|x-y|}$.

Il suffit de poser $\eta \coloneqq \varepsilon^2$ pour conclure. $\square$

Exemple 4. *$x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Supposons que la fonction carrée soit uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Soit $\varepsilon = 1$. Il existe donc $\eta > 0$ tel que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2, |x-y|\leq\eta \implies \left|x^2-y^2\right| \leq 1$. En particulier, pour tout $x\in\mathbb{R}$ et $y = x+\eta$, nous avons $|x-y|\leq\eta$ et $\left|x^2-y^2\right| = \eta\,|\eta+2x| \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Contradiction. $\square$

Exemple 5. *$x \mapsto \dfrac{1}{x}$ n'est pas uniformément continue sur $]0;1]$.*

Solution. Supposons que la fonction inverse soit uniformément continue sur $]0;1]$. Soit $\varepsilon = 1$. Il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $(x,y)\in]0;1]^2, |x-y|\leq\eta \implies \left|\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}\right| \leq 1$. En particulier, pour tout $x\in]0;1]$ et $y = x+\eta \in]0;1]$, nous avons $|x-y|\leq\eta$ et $\left|\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}\right| = \dfrac{|x-y|}{xy} = \dfrac{\eta}{xy} \geq \dfrac{\eta}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} +\infty$. Contradiction. $\square$

3 Exercices

Exercice 1. *Soit $f : [0;1[\to \mathbb{R}$ uniformément continue. Montrer que f est bornée.*

Solution. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe donc $\eta > 0$ tel que pour tout $(x,y) \in [0;1[^2, |x-y| \leq \eta \implies |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$. Puisque f est uniformément continue sur $[0;1-\eta]$ donc continue sur un segment, f est bornée par un certain $M > 0$ sur $[0;1-\eta]$. Soit $x \in]1-\eta;1[$. Nous avons $|x-(1-\eta)| = x-1+\eta \leq \eta$ donc $|f(x)|-|f(1-\eta)| \leq |f(x)-f(1-\eta)| \leq \varepsilon$, donc $|f(x)| \leq \varepsilon + |f(1-\eta)|$. Donc f est bornée par $\varepsilon + |f(1-\eta)|$ sur $]1-\eta;1[$. Donc f est bornée par $\max\{M, \varepsilon + |f(1-\eta)|\}$ sur $[0;1[$. $\square$

Exercice 2. *Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ uniformément continue. Montrer qu'il existe deux réels positifs a, b tels que pour tout $x \in \mathbb{R}_+, |f(x)| \leq ax+b$.*

Solution. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe donc $\eta > 0$ tel que pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2, |x-y| \leq \eta \implies |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$. Il existe un entier $n > 0$ tel que $(n-1)\eta \leq x \leq n\eta$ (il suffit de poser $n = \left\lfloor \frac{x}{\eta} \right\rfloor + 1$). Nous avons $|f(x)|-|f(0)| \leq |f(x)-f(0)| = \left| \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{kx}{n}\right) - f\left(\frac{(k-1)x}{n}\right) \right| \leq \sum_{k=1}^{n} \left| f\left(\frac{kx}{n}\right) - f\left(\frac{(k-1)x}{n}\right) \right| \leq \sum_{k=1}^{n} \varepsilon = n\varepsilon$. En effet, pour tout entier $k \in [\![1;n]\!], \left| \frac{kx}{n} - \frac{(k-1)x}{n} \right| = \frac{x}{n} \leq \eta$. Or, $(n-1)\eta \leq x \iff n \leq \frac{x}{\eta}+1 \iff n\varepsilon \leq \frac{\varepsilon}{\eta}x+\varepsilon$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+, |f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{\eta}x+\varepsilon+|f(0)|$. Il suffit de poser $a = \frac{\varepsilon}{\eta}$ et $b = \varepsilon + |f(0)|$. $\square$

Exercice 3. *Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ uniformément continue, telle que $\forall x > 0, f(nx) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Montrer que f converge vers 0 en $+\infty$.*

Solution n° 1. f uniformément continue donc $\forall \alpha > 0, \exists \eta > 0, \forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, |x-y| \leq \eta \implies |f(x)-f(y)| \leq \alpha$. Tout segment de longueur $x_0 > 0$ se partage en $\frac{x_0}{\eta}$ segments de longueur η et $\exists k \in \mathbb{N}, k \leq \frac{x_0}{\eta} \leq k+1$. Soit $\varepsilon > 0$. Nous choisissons x_0 suffisamment petit pour obtenir $k+1 \leq \frac{\varepsilon}{2\alpha}$. Nous avons $f(nx_0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \implies |f(nx_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. . Soit $x \geq Nx_0$. Nous avons l'existence d'un entier q tel que $Nx_0 \leq qx_0 \leq x \leq (q+1)x_0$. Le nombre de bonds de η pour rejoindre x depuis qx_0 est majoré par $k+1$, donc $|f(x)| \leq |f(qx_0)|+(k+1)\alpha \leq \varepsilon$ (c'est un peu l'idée de l'exercice 2 : en faisant des bonds de η, les variations de la fonction restent contrôlées). $\square$

Solution n° 2. Nous pouvons améliorer la solution précédente en choisissant dès le départ $x_0 = \eta$: les bonds de η nous amènent suffisamment près de n'importe quel x via la suite $(n\eta)$. Nous avons f uniformément continue donc $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta, \forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, |x-y| \leq \eta \implies |f(x)-f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Nous avons $f(n\eta) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \implies |f(n\eta)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Soit $x \geq N\eta$. Soit $m = \left\lfloor \frac{x}{\eta} \right\rfloor$. Nous avons $N\eta \leq m\eta \leq x \leq (m+1)\eta$ donc $|x - m\eta| \leq \eta$ donc $|f(x)| = |f(m\eta) + f(x) - f(m\eta)| \leq |f(m\eta)| + |f(x) - f(m\eta)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. □

Remarque 3. *La condition $\forall x > 0$ de l'exercice 3 est extrêmement forte et joue un rôle important. En effet, considérons la fonction sinus, qui ne converge pas. D'après l'exemple 1, nous savons qu'elle est uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Pour $x_0 = \pi$, nous avons $\sin(nx_0) = 0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, mais pour $x_1 = \frac{\pi}{2}$, le terme $\sin(nx_1)$ ne tend pas vers 0.*

4 Caractérisation séquentielle

Proposition 1 (Critère séquentiel)**.** *f est uniformément continue si et seulement si pour toutes suites u_n, v_n, $u_n - v_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0 \implies f(u_n) - f(v_n) \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$.*

Démonstration. Supposons f uniformément continue. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0, |u_n - v_n| \leq \eta \implies |f(u_n) - f(v_n)| \leq \varepsilon$. Soient u_n, v_n deux suites telles que $u_n - v_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$. Alors $\forall \alpha > 0, \exists N \geq 0, n \geq N \implies |u_n - v_n| \leq \alpha$. En particulier pour $\alpha = \eta$. Donc il existe $N \geq 0$ tel que $|f(u_n) - f(v_n)| \leq \varepsilon$. Donc $f(u_n) - f(v_n) \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$. Par contraposée, supposons f non uniformément continue. Donc $\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists (x, y) \in I^2, |x - y| \leq \eta$ et $|f(x) - f(y)| > \varepsilon$. En particulier, pour $\eta = \frac{1}{n}$, où $n \in \mathbb{N}^*$. Nous construisons ainsi deux suites u_n, v_n telles que $\forall n \in \mathbb{N}^*, |u_n - v_n| \leq \frac{1}{n}$ (donc $u_n - v_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$) et $|f(u_n) - f(v_n)| > \varepsilon$ (donc $f(u_n) - f(v_n) \underset{+\infty}{\not\longrightarrow} 0$). □

Remarque 4. *Une utilité de la proposition 1 est le calcul de certaines limites de suites, comme le montre l'exemple 6.*

Exemple 6. *Soit $u_n = \sqrt{\ln n}$ où $n \geq 1$. On a $u_{n+1} - u_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$.*

Solution. Posons $v_n \coloneqq \ln n$. Nous avons $v_{n+1} - v_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$. D'après l'exemple 3, la fonction racine carrée est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$ et $v_n \geq 0$ donc $u_{n+1} - u_n = \sqrt{v_{n+1}} - \sqrt{v_n} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$. □

Remarque 5. *En pratique, la proposition 1 permet de montrer simplement qu'une fonction n'est pas uniformément continue (de même que le critère séquentiel des limites de fonctions permet de montrer qu'une fonction n'admet pas de limite).*

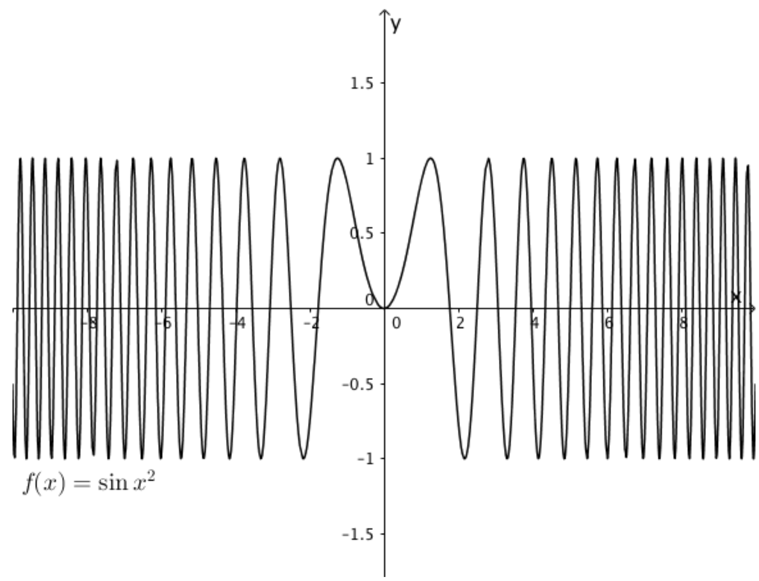
Exemple 7. *$x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.*

Solution. Posons $u_n \coloneqq n + \dfrac{1}{n}, v_n \coloneqq n$. Alors $|u_n - v_n| = \dfrac{1}{n} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$ mais $\left|u_n^2 - v_n^2\right| = 2 + \dfrac{1}{n^2} > 2$ donc $\left|u_n^2 - v_n^2\right| \underset{+\infty}{\not\longrightarrow} 0$. D'après la proposition 1, la fonction carrée n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$. $\square$

Remarque 6. *Graphiquement, la proposition 1 traduit le fait que si deux points quelconques sont proches, leurs images par une fonction uniformément continue le sont aussi. Ainsi, une fonction qui oscille trop vite ne peut pas être uniformément continue, comme le montre l'exercice 4.*

Exercice 4. *Montrer que la fonction $x \mapsto \sin x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.*

Solution. La représentation graphique de la fonction montre que sa fréquence d'oscillation devient de plus en plus élevée loin de l'origine. Il semble donc naturel que la fonction ne soit pas uniformément continue.



Posons $u_n \coloneqq \sqrt{2n\pi}, v_n \coloneqq \sqrt{\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi}$.

$|u_n - v_n| = \dfrac{\dfrac{\pi}{2}}{\sqrt{2n\pi} + \sqrt{\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi}} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$ mais $\left|\sin u_n^2 - \sin v_n^2\right| = 1$ donc $\left|\sin u_n^2 - \sin v_n^2\right| \underset{+\infty}{\not\longrightarrow} 0$. D'après la proposition 1, la fonction $x \mapsto \sin x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$. $\square$

Exercice 5. *Montrer que $x \mapsto \ln x$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}_+^*$.*

Solution n° 1. Supposons que la fonction logarithme népérien soit uniformément continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit $\varepsilon = 1$. Il existe donc $\eta > 0$ tel que pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, |x-y| \leq \eta \implies |\ln x - \ln y| \leq 1$. En particulier, pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$ et $x = y + \eta$, nous avons $|x-y| \leq \eta$ et $|\ln x - \ln y| = \ln\left(1 + \dfrac{\eta}{y}\right) \underset{y \to 0}{\longrightarrow} +\infty$. Contradiction. □

Solution n° 2. Si nous cherchons deux suites u_n, v_n de même limite $l \neq 0$, il vient $|\ln u_n - \ln v_n| = \left|\ln \dfrac{u_n}{v_n}\right| \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$ et cela n'apporte pas la contradiction souhaitée. Nous cherchons donc deux suites de limite nulle. Posons $u_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}, v_n = \dfrac{1}{n^2}$. Nous avons $|u_n - v_n| = \dfrac{1}{n} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$ mais $|\ln u_n - \ln v_n| = |\ln(n+1)| \underset{+\infty}{\not\longrightarrow} 0$. □

5 Lien avec les fonctions lipschitziennes

Définition 2. *On dit que f est k-lipschitzienne sur I si $\exists k > 0, \forall (x,y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq k|x-y|$.*

Remarque 7 (Interprétation graphique)**.** *Autrement dit, le coefficient directeur de toute sécante coupant deux fois la courbe est compris entre $-k$ et k ; on peut donc déplacer le long de la courbe un cône qui ne coupe la courbe qu'en son sommet. Plus k est petit, plus le demi-angle au sommet du cône s'élargit et moins la fonction peut être abrupte. C'est donc une notion plus restrictive que la continuité uniforme en termes de régularité.*

Exercice 6. *Montrer que $x \mapsto \arctan x$ est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.*

Solution. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, x < y, x \mapsto \arctan x$ est continue sur $[x,y]$ et dérivable sur $]x,y[$ donc d'après le théorème des accroissements finis, $\exists c \in]x,y[, |\arctan x - \arctan y| = \dfrac{1}{1+c^2}|x-y| \leq |x-y|$. Donc $x \mapsto \arctan x$ est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$. □

Exercice 7. *Montrer que la fonction racine carrée n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$.*

Solution. Supposons qu'il existe $k > 0$ telle que la fonction racine carrée soit k-lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$. Alors $\forall (x,y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq k|x-y|$. En particulier, pour $x = \dfrac{1}{n^2}$, où $n \in \mathbb{N}^*$, et $y = 0$, il vient $n \leq k$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Contradiction. □

Proposition 2. *f lipschitzienne $\implies$ f uniformément continue.*

Démonstration. Supposons que f soit k-lipschitzienne. Soit $\varepsilon > 0$. Posons $\eta = \dfrac{\varepsilon}{k}$. Soit $(x,y) \in I^2$. Nous avons $|x-y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq k|x-y| \leq k\eta = \varepsilon$. □

Remarque 8. *La réciproque est fausse, comme le montrent l'exemple 3 et l'exercice 7.*

6 Théorème de Heine

Remarque 9. *En traitant l'exemple 4, l'exemple 5 et l'exercice 5, nous remarquons que l'uniforme continuité est mise en défaut aux bornes exclues du domaine de définition. Cela nous donne l'intuition que sur un segment, une fonction suffisamment régulière est uniformément continue.*

Théorème 1 (Heine)**.** *Toute fonction continue sur un segment y est uniformément continue.*

Démonstration. Soit f continue sur $[a;b]$. Supposons f non uniformément continue. Donc $\exists\varepsilon > 0, \forall\eta > 0, \exists(x,y) \in [a;b]^2, |x-y| \leq \eta$ et $|f(x) - f(y)| > \varepsilon$. En particulier pour $\eta = \frac{1}{n}$, où $n \in \mathbb{N}^*$. Nous construisons ainsi deux suites u_n, v_n telles que $\forall n \in \mathbb{N}^*, |u_n - v_n| \leq \frac{1}{n}$ et $|f(u_n) - f(v_n)| > \varepsilon$. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une sous-suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ convergeant vers $l \in [a;b]$. Or, $\left(v_{\varphi(n)}\right)$ converge aussi vers l. En effet, $\left|l - v_{\varphi(n)}\right| = \left|l - u_{\varphi(n)} + u_{\varphi(n)} - v_{\varphi(n)}\right| \leq \left|l - u_{\varphi(n)}\right| + \left|u_{\varphi(n)} - v_{\varphi(n)}\right|$ et nous avons $\left|l - u_{\varphi(n)}\right| \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\left|u_{\varphi(n)} - v_{\varphi(n)}\right| \leq \frac{1}{\varphi(n)} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$ car $\varphi(n) \geq n$, donc $\left|l - v_{\varphi(n)}\right| \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$. Puisque f est continue, les suites $f\left(u_{\varphi(n)}\right)$ et $f\left(v_{\varphi(n)}\right)$ convergent vers $f(l)$. Donc $\left|f\left(u_{\varphi(n)}\right) - f\left(v_{\varphi(n)}\right)\right| \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$. Contradiction. □

Exercice 8. *Montrer que $x \mapsto x\ln x$ est uniformément continue sur* $]0;1]$.

Solution. L'expression $|x\ln x - y\ln y|$ ne se majore pas simplement en fonction de $x - y$, mais par croissance comparée, la fonction se prolonge par continuité en 0. Soit f la fonction prolongeant $x \mapsto x\ln x$ (nous avons $f(0) = 0$). Puisque f est continue sur $[0;1]$, d'après le théorème de Heine f est uniformément continue sur $[0,1]$ donc sur $]0;1]$. Or, sur $]0;1]$, f coïncide avec $x \mapsto x\ln x$, donc $x \mapsto x\ln x$ est uniformément continue sur $]0;1]$. □

Proposition 3. *La composée de deux fonctions uniformément continues est uniformément continue.*

Démonstration. Soient f, g uniformément continues, g définie sur I et f sur $g(I)$, montrons que $f \circ g$ est uniformément continue. f est uniformément continue donc $\forall\varepsilon > 0, \exists\alpha > 0, \forall(g(x), g(y)) \in g(I)^2, |g(x) - g(y)| \leq \alpha \implies |f \circ g(x) - f \circ g(y)| \leq \varepsilon$. Nous avons g uniformément continue donc $\exists\eta > 0, \forall(x,y) \in I, |x-y| \leq \eta \implies |g(x) - g(y)| \leq \alpha$. Au final, $\forall\varepsilon > 0, \exists\eta > 0, \forall(x,y) \in I, |x-y| \leq \eta \implies |f \circ g(x) - f \circ g(y)| \leq \varepsilon$. □

Exercice 9. *Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue et de limite nulle en l'infini. Montrer que f est uniformément continue.*

Solution n° 1. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $A > 0$ tel que pour tout $x \geq A, |f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{4}$. Donc pour tout $(x,y) \in [A;+\infty[^2, |f(x) - f(y)| \leq |f(x)| + |f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$. Donc f est uniformément continue sur $[A;+\infty[$, puisque n'importe quel η convient. Or, f est continue sur $[0;A]$ donc uniformément continue sur

$[0; A]$ d'après le théorème de Heine. Afin d'en déduire que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$, nous devons étudier le cas $x \in [0; A], y \in [A; +\infty[$. Conservons le ε de départ. La continuité uniforme sur $[0; A]$ nous donne un certain $\eta > 0$. Supposons que $|x - y| \leq \eta$. Nous avons $|x - A| \leq \eta$ donc $|f(x) - f(A)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Par ailleurs, $|f(A) - f(y)| \leq |f(A)| + |f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Donc $|f(x) - f(y)| = |f(x) - f(A) + f(A) - f(y)| \leq |f(x) - f(A)| + |f(A) - f(y)| \leq \varepsilon$. □

Solution n° 2. Considérons la fonction $g = f \circ \tan$ définie sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$. Elle se prolonge par continuité en $\frac{\pi}{2}$. En raisonnant comme à l'exercice 8, nous avons g uniformément continue sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$. Remarquons que $g \circ \arctan = f$. D'après l'exercice 6, la fonction arctan est lipschitzienne donc uniformément continue. Donc f est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$ comme composée de deux fonctions uniformément continue, d'après la proposition 3. □